This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

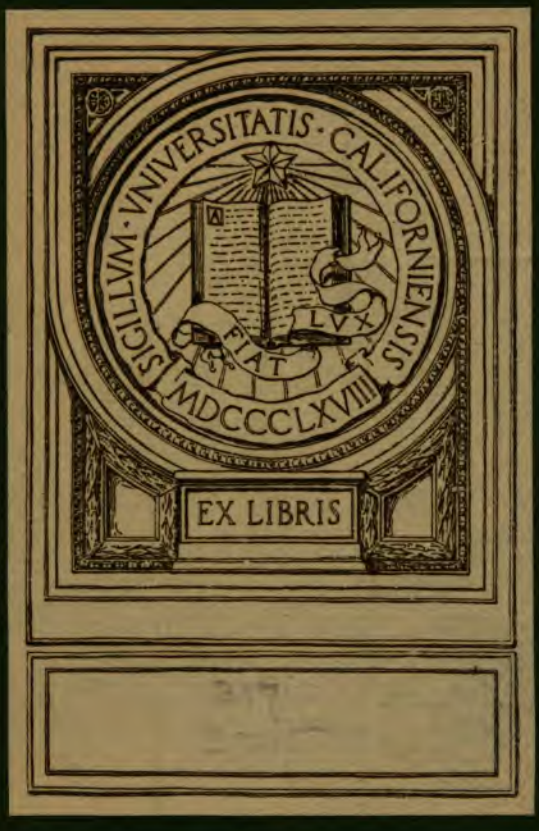
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

S. BERLINER
RENTEN UND ANLEIHEN

Digitized by Google


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

POLITISCHE ARITHMETIK

I. BAND

UNIV. OF CALIFORNIA

1912
LEIPZIG
VERLAG VON CARL ERNST POESCHEL

Digitized by Google

RENTEN UND ANLEIHEN

VON

DR. S. BERLINER
DOZENT AN DER HANDELSHOCHSCHULE
ZU LEIPZIG

UNIV. OF
CALIFORNIA

1912
LEIPZIG
VERLAG VON CARL ERNST POESCHEL

Digitized by Google

HB401
.B4

UNIV. OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

HERRN GEH. HOFRAT
PROF. H. RAYDT

262144

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Mit diesem Bande bringe ich das Lehrbuch der Politischen Arithmetik, dessen zweiter Band, die Versicherungsrechnung, bereits im vorigen Jahre erschienen ist, in seinem theoretischen Teil zum Abschluß.

Die rege Anteilnahme, die neben den Handelstheoretikern in den letzten Jahren die Praktiker an der Weiterbildung der Lehre von den Renten und Anleihen genommen haben, hat mich zu dem Versuch veranlaßt, dieses Gebiet in einer für jeden Nichtmathematiker verständlichen Form aufzubauen, um dadurch der Praxis bei ihrer Mitarbeit auf diesem Gebiet behilflich zu sein.

Dabei schien es mir zweckmäßig, zunächst die Zinseszins- und Rentenrechnung einigermaßen gründlich zu behandeln, um für die schwierigen Kapitel der Anleihenrechnung das notwendige Material bereitzustellen. Bei der Behandlung der Anleihen habe ich dann den Hauptwert auf die Kurs- und Rentabilitätsrechnung gelegt, da diese in Handels- und Verwaltungskreisen besonderes Interesse beansprucht. Ich glaubte, mich aber dabei auf das Prinzipielle beschränken und nicht zu sehr auf die große Mannigfaltigkeit der in der Praxis vorkommenden Tilgungspläne eingehen zu sollen. Eine Behandlung der Prämienanleihen habe ich z. B. ganz unterlassen, da diese nur noch eine ganz untergeordnete Rolle spielen.

An die Spitze eines jeden Abschnitts habe ich eine Aufgabe gestellt, die von vornherein eine klare Fragestellung geben soll. Die gewonnenen Resultate sind dann stets zu Lehrsätzen zusammengestellt, wodurch die Rückverweisung auf frühere Resultate erleichtert wird. Die Rechnungen selbst habe ich sämtlich ausführlich und mit Hilfe der abgekürzten Multiplikation und Division durchgeführt. Es wäre zu wünschen, daß diese Rechenmethode in weiteren Kreisen bekannt würde, als sie es jetzt ist. Die Aufgaben sind dabei so gewählt, daß ein vollkommenes Nachrechnen aller Zahlen möglich ist. Um aber die Anwendung der gewonnenen Resultate zu zeigen, ist in den meisten Abschnitten noch eine weitere, etwas umfangreichere Aufgabe behandelt.

Digitized by Google

Alle diese Aufgaben sind mit Hilfe der wenigen beigegebenen Tabellen lösbar.

Von der Wiedergabe umfassender Tabellen habe ich abgesehen, da solche in genügender Zahl existieren; ich verweise z. B. auf die umfangreichen Werke von Violeine, Ritter, Murai, Spitzer und Schinkenberger.

Dort, wo ich von der Darstellung früherer Autoren abweichen, bzw. dieselbe ergänzen mußte, habe ich meinen Standpunkt eingehend begründet und mich bemüht, die Beziehung zwischen der Ansicht meiner Vorgänger und der meinigen klar zu legen.

Es sollte mich freuen, wenn ich durch solche Arbeit die Lehre von den Renten und Anleihen gefördert hätte.

Leipzig, im Juni 1912.

Dr. S. Berliner.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1. Die Zinseszins-Tabelle 1
   a) Die Aufzinsung 1
   b) Die Abzinsung 5
   c) Der Diskont 9
2. Die Renten-Tabelle 11
   a) Die Aufzinsung der Pränumerando-Rente 11
      α) Aufzinsung auf das Ende des letzten Rentenjahres 11
      β) Aufzinsung auf einen späteren Termin 13
      γ) Aufzinsung auf einen Termin außerhalb der Tabelle 15
   b) Die Abzinsung der Postnumerando-Rente 17
      α) Abzinsung auf den Anfang des ersten Rentenjahres 17
      β) Abzinsung auf einen früheren Termin 18
      γ) Abzinsung auf einen außerhalb der Tabelle liegenden Termin 21
   c) Die Aufzinsung der Postnumerando-Rente 22
   d) Die Abzinsung der Pränumerando-Rente 24
   e) Berechnung des Rentenbetrages aus dem Renten-Aufzinsungsfaktor 25
   f) Berechnung des Rentenbetrages aus dem Renten-Abzinsungsfaktor 27
   g) Ermittlung der Dauer der Rentenzahlung 28
   h) Beziehung der Zinseszinstabelle zur Renten-Tabelle 29
      α) Die Aufzinsung 29
      β) Die Abzinsung 30
      Anhang. Die ewige Rente 32
         a) Die Postnumerando-Rente 32
         b) Die Pränumerando-Rente 34
3. Halbjährliche Verzinsung 35
   a) Die Aufzinsung 35
   b) Beziehung der halbjährlichen Verzinsung zur ganzjährlichen . . 36
   c) Beziehung der vierteljährlichen Verzinsung zur halbjährlichen und ganzjährlichen 38
   d) Die Aufzinsung (Fortsetzung) 39
   e) Die Abzinsung 41

Digitized by Google

Seite

4. Halbjährliche Renten 45
a) Bei halbjährlicher Verzinsung 45
b) Bei ganzjährlicher Verzinsung 47
α) Die Aufzinsung 47
β) Die Abzinsung 50
5. Antizipative Verzinsung 54
a) Die Aufzinsungs-Tabelle 54
b) Die Abzinsungs-Tabelle 58
6. Tilgbare Anleihen 61
a) Tilgung einer Anleihe bei gleichmäßiger Annuität 61
b) Tilgung einer Anleihe nach einem festen Prozentsatz des Anfangskapitals 71
c) Tilgung von Partial-Obligationen auf Grund einer gleichmäßigen Annuität 77
d) Tilgung einer Anleihe mit Aufgeld bei steigender Annuität . . 81
e) Tilgung einer Anleihe mit Aufgeld bei gleichmäßiger Annuität 82
7. Anleihekurse 88
a) Die Kurse der ewigen Renten (Konsols) 88
b) Kurs einer Anleihe, die durch gleichmäßige Annuitäten verzinst und getilgt wird 91
Anhang. Die Benutzung von Kurstabellen 95
c) Kurs einer Anleihe, die nach einem festen Prozentsatz des Anfangskapitals getilgt wird 96
d) Kurs einer Anleihe, die bei gleichmäßiger Annuität mit Aufgeld zurückgezahlt wird 98
8. Rentabilität 106
a) Rentabilität von Konsols 106
b) Rentabilität von Anleihen, die bei gleichmäßiger Annuität verzinst und getilgt werden 108
c) Erklärung der Rentabilität 111
9. Anleihen, die nach einem festen Prozentsatz des Kapitalrestes getilgt werden 117
10. Bewertung von Obligationen in der Bilanz 122
a) Disagio bei Anleihen, die al pari rückzahlbar sind 122
b) Disagio bei Anleihen, die über Pari rückzahlbar sind 133
11. Versicherung gegen Auslosungsverlust 139

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

1. Die Zinseszins-Tabelle.

a) Die Aufzinsung.

Aufgabe 1. Es zahlt jemand M 10000.— bei einer Bank ein, die ihm sein Guthaben mit 4% jährlich verzinst. Zu welchem Betrage wachsen diese M 10000.— in 6 Jahren an, wenn Provisionen, Spesen usw. nicht zu berechnen sind?

Das Guthaben beträgt

			M 10000.— multipliziert mit
		M 10000.—	1
	+ 4%	„ 400.—	
nach 1 Jahr		M 10400.—	1.04
	+ 4%	„ 416.—	
„ 2 Jahren		M 10816.—	1.0816
	+ 4%	„ 432.64	
„ 3 „		M 11248.64	1.124864
	+ 4%	„ 449.95	
„ 4 „		M 11698.59	1.169859
	+ 4%	„ 467.94	
„ 5 „		M 12166.53	1.216653
	+ 4%	„ 486.66	
„ 6 „		M 12653.19	1.265319

Legt man M 20000.— auf Zinsen, so beträgt das Guthaben

			M 20000.— multipliziert mit
		M 20000.—	1
	+ 4%	„ 800.—	
nach 1 Jahr		M 20800.—	1,04
	+ 4%	„ 832.—	
„ 2 Jahren		M 21632.—	1,0816

usw.

Man ersieht daraus, daß man den Endwert eines beliebigen Kapitals durch einfache Multiplikation mit den Faktoren 1.04, 1.0816, 1.124864 usw. berechnen kann.

Digitized by Google

Diese Faktoren berechnen sich folgendermaßen:

M 1.— wächst in einem Jahre an zu M 1.04
„ 2.— wachsen „ „ „ „ „ 2 × „ 1.04 = M 2.08
„ 1.04 „ „ „ „ „ „ 1.04 × „ 1.04 = „ 1.0816.

Legt man also M 1.— auf Zinsen, so erhält man nach einem Jahre M 1.04, und legt man diese gleich wieder auf Zinsen, so erhält man nach einem weiteren Jahre, also am Ende des zweiten Jahres,

$$1.04 \times M\ 1.04 = M\ 1.0816.$$

Legt man diese M 1.0816 wieder auf Zinsen, so erhält man nach einem weiteren Jahre:

$$1.0816 \times M\ 1.04 = M\ 1.124864.$$

$$\begin{array}{r} 10816 \times 104 \\ \hline 43264 \\ \hline 1124864 \end{array}$$

Da $1.0816 = (1.04) \times (1.04)$ ist, so kann man für $1.0816 \times M\ 1.04$ auch schreiben:

$$(1.04) \times (1.04) \times (1.04) = M\ 1.124864.$$

Man erhält also für M 1.— am Ende des

1. Jahres M (1.04),
2. „ „ $(1.04) \times (1.04)$,
3. „ „ $(1.04) \times (1.04) \times (1.04)$,
4. „ „ $(1.04) \times (1.04) \times (1.04) \times (1.04)$ usf.

In symbolischer Form geschrieben ergibt sich für M 1.— am Ende des

1. Jahres M (1.04),
2. „ „ $(1.04)^2$,
3. „ „ $(1.04)^3$,
4. „ „ $(1.04)^4$ usf.

Ohne Rücksicht auf anderweitige Bedeutung dieser Zeichen lese man z. B.:

$(1.04)^3$ als: „M 1.— zu 4% 3 Jahre lang verzinst"
$(1.04)^4$ „ „ 1.— „ 4% 4 „ „ „ .

Gemäß der Berechnung ergeben sich die Werte:

1. $(1.04)^1 = 1.04$,
2. $(1.04)^2 = 1.0816$,
3. $(1.04)^3 = 1.124864$,
4. $(1.04)^4 = 1.169859$ usf.

Digitized by Google

Die Werte dieser Ausdrücke von 1—40 sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Wir bezeichnen diese Faktoren in der Folge als Aufzinsungsfaktoren.

Aufgabe 2. Zu welchem Betrage wachsen M 1.124864 in 4 Jahren bei 4 %iger jährlicher Verzinsung an?

Nach der Tabelle wächst M 1.— an zu M 1.169859, mithin wachsen M 11248.64 an zu

$$\text{M } 11248.64 \times 1.169859 = \text{M } 13159.32.$$

$$\begin{array}{r} 1124864 \\ 9589611 \\ \hline 11248640 \\ 1124864 \\ 674919 \\ 101238 \\ 8999 \\ 562 \\ 101 \\ \hline 13159323 \end{array}$$

Es ist aber:

$$1.124864 = (1.04)^3,$$
$$1.169859 = (1.04)^4,$$
$$1.315932 = (1.04)^7,$$

und es ergibt sich der

Lehrsatz:

$$(1.04)^3 \times (1.04)^4 = (1.04)^7,$$

d. h.: Zinst man M 1.— zunächst 3 Jahre lang auf und dann den erhaltenen Betrag noch 4 Jahre lang, so erhält man ebensoviel, wie wenn man M 1.— 7 Jahre aufzinst. Oder:

Multipliziert man den 3. Aufzinsungsfaktor mit dem 4., so erhält man den 7. Aufzinsungsfaktor.

Aufgabe 3. Zu welchem Betrage wächst ein Kapital von M 10000.— in 50 Jahren an?

Zunächst ist zu berechnen, zu welchem Betrage M 1.— in 50 Jahren anwächst, da dieser Wert nicht mehr aus der Tabelle entnommen werden kann.

M 1.— wächst in 40 Jahren an zu M 4.801021,
„ 1.— „ „ 10 „ „ „ „ 1.480244,
mithin wächst M 1.— „ 50 „ „ „:

$$\text{M } 4.801021 \times 1.480244 = \text{M } 7.106683.$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{r}
4801021 \\
4420841 \\
\hline
801021 \\
1920409 \\
384082 \\
960 \\
192 \\
19 \\
\hline
7106683
\end{array}
$$

Daher wachsen M 10000.— in 50 Jahren bei 4% an zu M 71066.83.

Spezialfall.

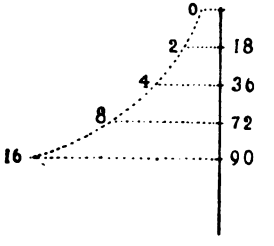
Nach der Tabelle ist

$$(1.04)^{18} = \text{ca. } 2,$$

d. h. in 18 Jahren verdoppelt sich ein Kapital durch 4%ige Verzinsung. Da ferner nach dem obigen Lehrsatz

$$(1.04)^{18} \times (1.04)^{18} = (1.04)^{36}$$
$$2 \times 2 \quad = 4$$

ist, so folgt, daß sich ein Kapital in 36 Jahren vervierfacht.



Ein Kapital 1 wächst also annähernd an

in 18 Jahren	zum	Kapital		2
„ 36 „	„	„	„	4
„ 54 „	„	„	„	8
„ 72 „	„	„	„	16
„ 90 „	„	„	„	32

usf.

Aufgabe 4. Zu welchem Betrage würde 1 Pfennig, der bei Christi Geburt 4%ig auf Zinseszins gelegt worden wäre, bis zum Ende des Jahres 2000 angewachsen sein?

1 Pfg. wächst an (siehe Aufgabe 3)

in	50 Jahren	zu	7,1	Pfg.,	
„	100 „	„	50,5	„	
„	200 „	„	2550	„	
„	400 „	„	6500000	„	(6 mit 6 Nullen),
„	800 „	„	40 Billionen		(40 „ 12 „),
„	1600 „	„			(16 „ 26 „),
„	2000 „	„			(1,1 „ 34 „);

genauer erhält man

1,166 mit 34 Nullen.

Digitized by Google

b) Die Abzinsung.

Aufgabe 1. Es wünscht jemand, nach Verlauf von 10 Jahren über ein Kapital von M 10000.— verfügen zu können. Welchen Betrag muß er heute bei einer Bank einzahlen, wenn diese jährlich 4% Zinsen vergütet?

Oder: Es schuldet jemand M 10000.— fällig nach 10 Jahren. Mit welchem Betrage kann er seinen Gläubiger heute abfinden, wenn jährlich 4% Zinsen berechnet werden?

Die am nächsten liegende Überlegung ist folgende:

Wenn man heute eine Schuld von M 10000.— begleicht, die erst nach 1 Jahre fällig ist, so braucht man nicht die vollen M 10000.— zu zahlen, sondern darf 4% des Betrages kürzen; man zahlt also nur:

M 10000.—
— „ 400.—
M 9600.—.

Nach dieser Methode wird im kaufmännischen Leben allgemein der Diskont berechnet.

Man sieht aber sofort, daß diese Rechnung nicht genau ist. Denn legt man M 9600.— zu 4% auf Zinsen, so erhält man nach einem Jahre nur:

M 9600.— × 1.04
+ „ 384.—
M 9984.—,

also nicht, wie man wollte, M 10000.—. Der Fehler wird um so größer, je länger die Zeit der Verzinsung ist, und wird schließlich so groß, daß er zu ganz unsinnigen Resultaten führt.

Schuldet z. B. jemand M 10000.— nach 10 Jahren, und will er heute zahlen, so dürfte er nach der kaufmännischen Berechnung:

$$10 \times 4\% = 40\%$$

abziehen, brauchte also nur noch:

M 10000.—
— „ 4000.—
M 6000.—

zu zahlen. In 10 Jahren wachsen die M 6000.— aber nur an zu:

M 6000.— × 1.480244
= M 8881.464,

so daß der Gläubiger einen Ausfall von

M 1118.54

haben würde.

Digitized by Google

Wären die M 10000.— aber erst nach 25 Jahren fällig, so wäre nach dieser Diskontrechnung ihr heutiger Wert:

$$\begin{array}{r} \text{M } 10000.— \\ -\ 100\,\% \text{ „ } 10000.— \\ \hline 0. \end{array}$$

Wäre also die kaufmännische Diskontberechnung auch für lange Zeiten genau genug, so brauchte man keinen Pfennig bei der Bank einzuzahlen und könnte nach 25 Jahren ein beliebig großes Kapital abheben. Dies zeigt deutlich, dass man die Diskontberechnung ganz anders anstellen muß, sobald es sich um größere Zeiträume handelt.

Die Überlegung, die hier zum Ziel führt, ist folgende. Legt man M 1.— 1 Jahr lang bei 4% auf Zinsen, so erhält man M 1.04 zurück. Will man am Ende des Jahres nur M 1.— erhalten, so braucht man zu Anfang nur $\frac{\text{M } 1.—}{1.04}$ einzuzahlen.

$$\begin{array}{lll} \text{Für M } 1.— & \text{erhält man M } 1.04, \\ \text{„ } \frac{\text{M } 1.—}{1.04} & \text{„ \quad „ \quad „ } 1.—. \end{array}$$

Es ist aber $\frac{1}{1.04} = 0.961538.$

$$\begin{array}{r|l} 104) & 1000 = 96153846 \\ & 640 \\ & 160 \\ & 560 \\ & 400 \\ & 880 \\ & 480 \\ & 640 \end{array}$$

Zahlt man zu Anfang des Jahres M 0.961538 ein, so erhält man am Ende M 1.— zurück.

Probe:

$$\begin{array}{rr} & 0.961538 \\ + 4\,\% & \underline{38462} \\ & 1.000000. \end{array}$$

Entsprechend schließt man:

$$\begin{array}{lll} \text{M } 1.— & \text{wächst in 2 Jahren an zu M } 1.0816, \\ \text{„ } \frac{1.—}{1.0816} & \text{„ \quad „ } 2 \text{ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ } 1.—. \end{array}$$

Legt man also:

Digitized by Google

$$\frac{\text{M } 1.—}{1.0816} = 0.924556$$

10816) 100000 = 09245562
26560
49280
6016
608
67
2

auf Zinsen, so erhält man nach 2 Jahren M 1.—

Probe:

0.924556
+ 4% 36982
0.961538
+ 4% 38462
1.000000.

Man sagt: „0.961538 ist der gegenwärtige oder diskontierte Wert von M 1.—, die nach 1 Jahre fällig ist."

„0.924556 ist der gegenwärtige oder diskontierte Wert von M 1.—, die nach 2 Jahren fällig ist" usf.

Da die Zahl 1.0816 als $(1.04)^2$ geschrieben werden konnte, so kann man entsprechend setzen:

$$\frac{1}{1.0816} = \frac{1}{(1.04)^2} = 0.924556$$

und diesen Ausdruck lesen: M 1.— bei 4% 2 Jahre lang abgezinst.

Setzt man diese Rechnung fort, so ergibt sich:

$$\frac{1}{(1.04)} = 0.961538,$$

$$\frac{1}{(1.04)^2} = \frac{1}{1.0816} = 0.924556,$$

$$\frac{1}{(1.04)^3} = \frac{1}{1.124864} = 0.888996,$$

$$\frac{1}{(1.04)^4} = \frac{1}{1.169859} = 0.854804 \text{ usw.}$$

vgl. Tabelle I.

Mit Hilfe einer solchen Tabelle kann der diskontierte Wert eines beliebigen Betrages durch einfache Multiplikation gefunden werden.

Wir bezeichnen diese Faktoren in der Folge als **Abzinsungsfaktoren.**

Digitized by Google

Aufgabe 2. Es will jemand eine Schuld von M 50000.—, die nach 10 Jahren fällig ist, heute tilgen.

Er hat dafür den Betrag von:

$$\text{M } 50000 \times 0.675564 = \text{M } 33778.20$$

zu zahlen.

Probe. Der Betrag von M 33778.20 muß, 10 Jahre lang zu 4% verzinst, M 50000.— ergeben.

```
3377820 × 1480244
4420841
-------
3377820
1351128
 270226
    676
    135
     13
-------
M 49999 98.
```

Für die Aufzinsungsfaktoren war gezeigt worden, daß z. B.

$$(1.04)^8 \times (1.04)^4 = (1.04)^7$$

ist. Entsprechend kann man auch hier folgern: Wenn man M 1.— erst 3 Jahre lang diskontiert und den erhaltenen Betrag nochmals 4 Jahre lang diskontiert, so muß man dasselbe erhalten, wie wenn man M 1.— gleich 7 Jahre lang diskontiert, oder es muß gemäß der Tabelle:

$$0.888996 \times 0{,}854804 = 0.759918$$ sein.

```
888996
408458
------
711197
 44450
  3556
   711
     3
------
759917
```

Nun war:

$$0.888996 = \frac{1}{(1.04)^8},$$

$$0.854804 = \frac{1}{(1.04)^4},$$

$$0.759918 = \frac{1}{(1.04)^7},$$

und mithin ist bewiesen, daß:

Digitized by Google

$$\frac{1}{(1.04)^3} \times \frac{1}{(1.04)^4} = \frac{1}{(1.04)^7}$$ ist.

Lehrsatz 1. Multipliziert man den 3. Abzinsungsfaktor mit dem 4., so erhält man den 7. Abzinsungsfaktor.

Endlich möge noch der Zusammenhang zwischen den Aufzinsungsfaktoren und den Abzinsungsfaktoren hervorgehoben werden.

Wenn man M 1.— erst ein Jahr diskontiert, den Betrag aber wieder ein Jahr aufzinst, so muß sich wieder M 1.— ergeben. Mithin ist:

$$0.9561538 \times 1.04 = 1.$$

$$961538 \times 104$$
$$38462$$
$$1000000$$

Entsprechend für 20 Jahre:

$$0.456387 \times 2.191123 = 1$$

$$456387 \times 2191123$$
$$3211912$$
$$912774$$
$$45639$$
$$41075$$
$$456$$
$$46$$
$$9$$
$$1$$
$$1000000$$

d. h. das Produkt von Aufzinsungsfaktor und Abzinsungsfaktor ist gleich 1.

$$(1.04)^{20} \times \frac{1}{(1.04)^{20}} = 1.$$

Lehrsatz 2. Aufzinsungsfaktor × Abzinsungsfaktor = 1,

oder:

$$\textbf{Aufzinsungsfaktor} = \frac{1}{\textbf{Abzinsungsfaktor}},$$

$$\textbf{Abzinsungsfaktor} = \frac{1}{\textbf{Aufzinsungsfaktor}},$$

d. h. anstatt durch einen Abzinsungsfaktor zu dividieren, kann man mit dem zugehörigen Aufzinsungsfaktor multiplizieren und umgekehrt.

Hierdurch entsteht in vielen Fällen eine beträchtliche Erleichterung für die Rechnung.

c) Der Diskont.

Im vorigen Abschnitt war gezeigt worden, daß der heutige Wert von M 1.—, die nach einem Jahre fällig ist, bei 4 %iger Verzinsung M 0.961538

Digitized by Google

beträgt. Will also jemand die Schuld von M 1.—, die nach einem Jahre fällig ist, schon heute tilgen, so darf er einen Abzug von

$$\begin{array}{r} 1 \\ \div\, 0.961538 \\ \hline 0.038462 \end{array}$$

machen. Diese Zahl 0.038462 nennt man den Diskont. Er ist etwas geringer als der kaufmännische Diskont, der bei 4 %:

0.04

beträgt.

Ändert sich die Höhe des Zinsfußes, so ändert sich natürlich auch die Höhe des Diskontes.

So ist bei 3 %iger Verzinsung der heutige Wert von M 1.—, die nach einem Jahre fällig ist,

$$\frac{1}{1.03} = 0.9708738,$$

$$\begin{array}{rl} 103) & 1000 = 9708738 \\ & 730 \\ & 900 \\ & 760 \\ & 390 \\ & 810 \end{array}$$

und mithin beträgt der Diskont:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \div\, 0.9708738 \\ \hline 0.0291262 \end{array}$$

gegenüber dem kaufmännischen Diskont von:

0.03.

Für $3\frac{1}{2}$ %ige Verzinsung ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \div\, 0.9661835 \\ \hline 0.0338165. \end{array}$$

Eine Gegenüberstellung des kaufmännischen und des genau gerechneten Diskonts zeigt folgendes Bild:

3 %	0.03	0.0291262,
$3\frac{1}{2}$ %	0.035	0.0338165,
4 %	0.04	0.0384615.

Digitized by Google

2. Die Renten-Tabelle.

a) Die Aufzinsung der Pränumerando-Rente.

α) Aufzinsung auf das Ende des letzten Rentenjahres.

Aufgabe 1. Jemand zahlt zu Anfang eines jeden Jahres M 1000.— bei einer Bank ein, die ihm sein Guthaben mit 4% jährlich verzinst. Über welchen Betrag kann er am Ende des 3. Jahres verfügen?

Sein Guthaben beträgt

		M 1000.—
	+ 4%	„ 40.—
am Ende des 1. Jahres		M 1040.—
	+	„ 1000.—
		M 2040.—
	+ 4%	„ 81.60
am Ende des 2. Jahres		M 2121.60
	+	„ 1000.—
		M 3121.60
	+ 4%	„ 124.86
am Ende des 3. Jahres		M 3246.46.

Diese Art, den Endwert einer Rente zu berechnen (Rentenaufzinsung), ist umständlich, sobald es sich um lange Zeiträume handelt. Um zu einer einfacheren Methode zu gelangen, denken wir uns den Vorgang folgendermaßen:

Der Betreffende zahlt heute

nach	0 Jahren	M 1000.—	bei	der	Bank	A
„	1 Jahr	„ 1000.—	„	„	„	B
„	2 Jahren	„ 1000.—	„	„	„	C

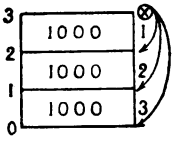
ein. Sein Guthaben bei den Banken ist dann am Ende des

Digitized by Google

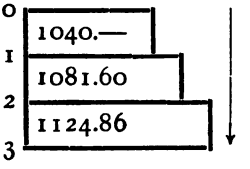
		A	B	C
0. Jahres		1000.—		
	+ 4%	40.—		
am Ende d. 1. Jahres		1040.—	1000.—	
	+ 4%	41.60	40.—	
„ „ „ 2. „		1081.60	1040.—	1000.—
	+ 4%	43.26	41.60	40.—
„ „ „ 3. „		1124.86	1081.60	1040.—

zusammen 1040.—
1081.60
1124.86
Sa. 3246.46.

Man hat also die nach 0, 1, 2 Jahren eingezahlten M 1000 bezüglich 3, 2, 1 Jahr aufzuzinsen, wofür folgende Darstellung gewählt werden möge:



oder man hat die Summe zu bilden von



Zahlt man jährlich M 2000.— bei der Bank ein, so verdoppeln sich die Beträge. Es genügt also, wenn man den aufgezinsten Wert von jährlich M 1.— berechnet und diesen mit dem Rentenbetrag multipliziert. Nach dem oben Ausgeführten berechnet sich aber eine solche Rentenaufzinsungs-Tabelle durch Summation der Aufzinsungsfaktoren.

Aufzinsungsfaktor	Rentenaufzinsungsfaktor
1.04	1.04
1.0816	2.1216
1.124864	3.246464
1.169859	4.416323

usw. (siehe Tabelle II).

Digitized by Google

Aufgabe 2. Jemand zahlt 18mal zu Anfang eines jeden Jahres M 500,— bei einer Bank ein, die ihm sein Guthaben mit 4% jährlich verzinst. Welches Kapital hat er nach 18 Jahren angesammelt?

Nach der Tabelle wächst

jährlich M 1.— in 18 Jahren an zu M 26.671229,

mithin wachsen

jährlich M 500.— in 18 Jahren an zu $500 \times$ M 26.671229
$=$ M 13335.61.

β) Aufzinsung auf einen späteren Termin.

Aufgabe 1. Jemand zahlt dreimal zu Anfang des Jahres M 1000.— bei einer Bank ein. Über welchen Betrag kann er am Ende des 5. Jahres verfügen, wenn die Bank jährlich 4% Zinsen vergütet?

1. Am Ende des 3. Jahres verfügt er über M 3246.46, die durch weitere Verzinsung anwachsen zu

	M 3246.46
+ 4%	129.86
	M 3376.32
+ 4%	135.05
	M 3511.37.

Durch Multiplikation mit dem zweiten Aufzinsungsfaktor würde sich ergeben.

M 3246.46 $\times$ 1.0816 $=$ M 3511.37.

324646	$\times$ 10816
61801	
324646	
25971	
325	
195	
351137	

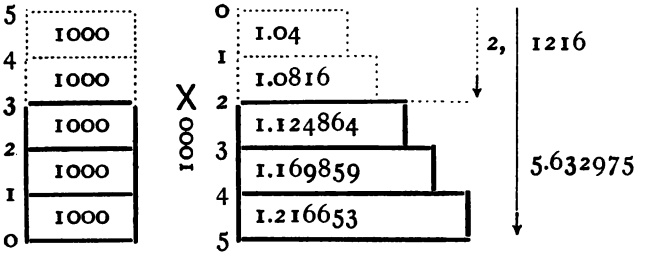
Lehrsatz 1. Soll eine Rente auf einen späteren Termin als das Ende des letzten Rentenjahres aufgezinst werden, so kann man sie zunächst bis zum Ende des letzten Rentenjahres und dann bis zu dem gewünschten Termin aufzinsen.

2. Etwas bequemer gestaltet sich die Berechnung bei folgender Überlegung:

Angenommen, der Betreffende zahlte auch noch zu Anfang des 4. oder

Digitized by Google

5. Jahres M 1000.— bei der Bank ein, so wäre der Endwert seiner Zahlungen am Ende des 5. Jahres durch folgende Zeichnung dargestellt.



Der Wert der 5 Zahlungen wäre am Ende des 5. Jahres

$$M\ 1000.— \times 5.632975 = M\ 5632.98.$$

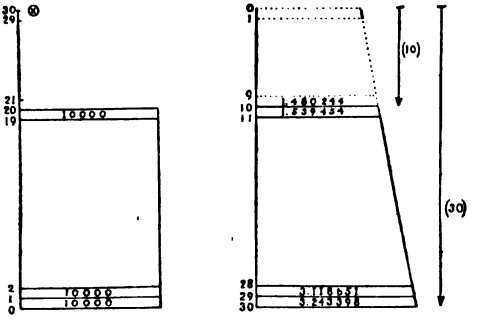
Die letzten beiden Zahlungen werden aber nicht mehr geleistet; ihr Endwert in Höhe von

$$M\ 1000.— \times 2.1216 = M\ 2121.60$$

ist also in Abzug zu bringen, und es ergibt sich als Wert der wirklich geleisteten 3 Zahlungen à M 1000.— am Ende des 5. Jahres

M 5632.98
„ 2121.60
M 3511.38 (wie oben).

Lehrsatz 2. Man kann den Wert einer Rente für einen späteren Termin als das Ende des letzten Rentenjahres durch Subtraktion eines Renten-Aufzinsungsfaktors von einem anderen berechnen.



Aufgabe 2. Eine Aktiengesellschaft hat 20 Jahre lang ihrem Reservefonds M 10000.— und 4 % überwiesen. Bis zu welchem Betrag ist derselbe am Ende des 10. Jahres nach dem letzten Dotierungsjahr angewachsen?

Die Gesellschaft hat 20mal, und zwar nach 0, nach 1 ... nach 19 Jahren dem Reservefonds je M 10000.— und 4 % Zinsen zugeführt, dann aber 10 Jahre lang, und zwar nach 20, 21—29 Jahren nur noch die Zinsen gutgeschrieben.

Digitized by Google

58.328335
÷ 12.486351
45.841984 × M 10000.—
= M 458419.84.

Die andere Art würde ergeben:

Wert der Dotierungen am Ende des 20. Jahres (20. Rentenaufzinsungsfaktor)

30.969202 × M 10000.— = M 309692.02,

Wert der Dotierungen am Ende des 30. Jahres (multipliziert mit dem 10. Aufzinsungsfaktor)

M 309692.02 × 1.480244 = M 458419.76.

30969202
4420841
30969202
12387681
2477536
6194
1239
124
45841976

Durch Multiplikation mit dem genaueren Faktor 1.48024428 ergibt sich M 458419.84 (wie oben).

γ) Aufzinsung auf einen Termin außerhalb der Tabelle.

Aufgabe. Eine Stiftung legt jährlich M 1000.— zurück. Zu welchem Betrage laufen diese in 50 Jahren einschließlich 4% Zinseszinsen auf?

Die in den ersten 10 Jahren zurückgelegten Beträge haben am Ende des 10. Jahres den aufgezinsten Wert von (vgl. Fig. S. 16)

12.48635^{1} × M 1000.— = M 12486.35^{1}.

Zinst man diesen Betrag noch 40 Jahre auf (ohne auf die weiteren 40 Zahlungen Rücksicht zu nehmen), so erhält man den Endwert der ersten 10 Zahlungen nach Ablauf von 50 Jahren als

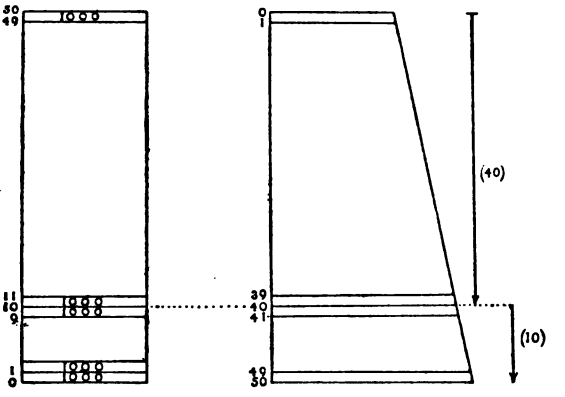
M 12486.35^{1} × 4.801021 = M 59947.23^{4}

12486351
1201084
49945404
9989081
12486
250
13
59947234

Digitized by Google

Der Endwert der folgenden 40 Zahlungen am Ende des 50. Jahres ist

$$98.826536 \times \text{M } 1000.— = \text{M } 98826.53^{6}.$$



Mithin ist der Endwert der 50 Zahlungen

M 59947.234
+ „ 98826.536
M 158773.770.

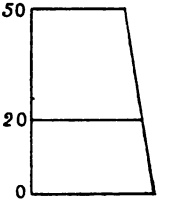
Statt die 50 Zahlungen in 10 und 40 zu zerlegen, kann man sie auch beliebig in anderer Weise, z. B. in 20 und 30, zerlegen.

Der Endwert der ersten 20 Zahlungen ist am Ende des 20. Jahres

$$30.969202 \times \text{M } 1000.— = \text{M } 30969.20^{2}.$$

Durch Aufzinsung wachsen diese bis zum Ende des 50. Jahres an zu

$$\text{M } 30969.20^{2} \times 3.243398 = \text{M } 100445.44^{8}.$$



30969202
8933423
92907606
6193841
1238768
92908
9291
2787
247
100445448

Der Endwert der weiteren 30 Zahlungen ist

$$58.328335 \times \text{M } 1000.— = \text{M } 58328.33^{5}.$$

Der Endwert der 50 Zahlungen berechnet sich daher zu

M 100445.44⁸
„ 58328.33⁵
M 158773.78⁸ (wie oben).

Lehrsatz. Um den Endwert einer Rentenreihe zu bestimmen, kann man die Reihe beliebig in zwei Reihen zerlegen, muß jedoch den

Digitized by Google

Endwert der einen noch um so viel Jahre aufzinsen, wie die andere läuft.

b) Die Abzinsung der Postnumerando-Rente.

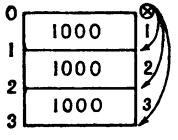
α) Abzinsung auf den Anfang des ersten Rentenjahres.

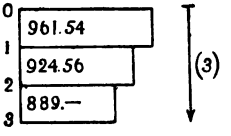
Aufgabe 1. Jemand hat die Anwartschaft auf eine dreimalige Postnumerando-Rente von M 1000.—. Welchen Betrag kann man ihm für diese Anwartschaft bieten bei Berücksichtigung von 4% Zinseszinsen?

Die ersten M 1000.— sind fällig nach 1 Jahre;
ihr Barwert ist daher (siehe S. 6) M 1000.— × 0.961538 = M 961.54;
die zweiten M 1000.— sind fällig nach 2 Jahren;
ihr Barwert daher M 1000.— × 0.924556 = M 924.56;
die dritten M 1000.— sind fällig nach 3 Jahren;
ihr Barwert ist daher M 1000.— × 0.888996 = M 889.—.

Barwert der Rente M 2775.10.

In graphischer Darstellung ergibt sich





Probe. Der Betreffende zahlt bei der Bank M 2775.10 ein. Die Bank vergütet ihm jährlich 4% Zinsen auf sein Guthaben und zahlt ihm zu Ende jedes Jahres M 1000.— aus:

Guthaben heute:		M 2775.10
	+ 4%	„ 111.—
		M 2886.10
	÷	„ 1000.—
Guthaben am Ende des 1. Jahres		M 1886.10
	+ 4%	„ 75.44
		M 1961.54
	÷	„ 1000.—
Guthaben am Ende des 2. Jahres		M 961.54
	+ 4%	„ 38.46
		M 1000.—
	÷	„ 1000.—
Guthaben am Ende des 3. Jahres		0.—.

Digitized by Google

Aus der Ableitung geht hervor, daß die Rentenabzinsungsfaktoren durch Summation der Abzinsungsfaktoren erhalten werden können.

	Abzinsungs-faktor	Rentenabzinsungs-faktoren
1	0.961538	0.961538
2	0.924556	1.886095*)
3	0.888996	2.775091
4	0.854804	3.629895

usw. (siehe Tabelle II).

Aufgabe 2. Welchen Barwert hat eine 18mal am Ende jedes Jahres fällige Rente im Betrag von M 5000.— bei Berechnung von 4% jährlichen Zinsen?

Nach der Tabelle wächst

jährlich M 1.— in 18 Jahren an zu M 12.659297;

mithin wachsen

jährlich M 500.— in 18 Jahren an zu M 500.— × 12.659297
= M 6329.65.

β) Abzinsung auf einen früheren Termin.

Aufgabe 1. Welchen Barwert hat eine Rente von M 1000.—, welche nach 2 Jahren Karenzzeit am Ende jedes der dann folgenden 3 Jahre fällig ist?

Am Ende des 2. Jahres oder zu Anfang des 3. Jahres haben die drei Rentenbeträge den Barwert von

M 1000.— × 2.775091 = M 2775.09[1].

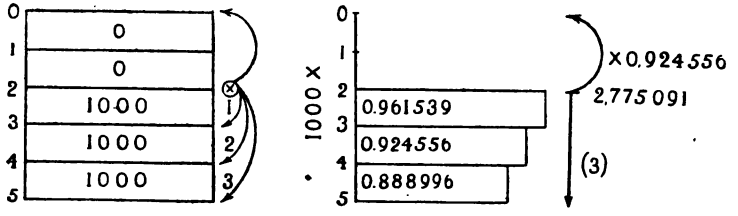
Ihr Barwert ist also heute

M 2775.09[1] × 0.924556 = M 2565.73

277509[1]
655429
2497582
55502
11100
1388
139
16
2565727

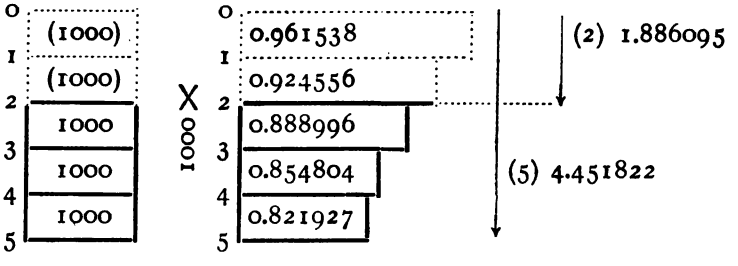
*) Kleine Differenzen in der letzten Stelle rühren von Abrundungen her.

Digitized by Google



Lehrsatz 1. Soll eine Rente auf einen früheren Termin als den Anfang des ersten Rentenjahres abgezinst werden, so kann man sie zunächst auf den Anfang des ersten Rentenjahres und dann bis zum gewünschten Termin abzinsen.

Einfacher stellt sich die Rechnung wieder bei folgender Überlegung (vgl. S. 14).



Würde die Rente auch in den ersten beiden Jahren gezahlt, so wäre ihr Barwert

$$M\ 1000.— \times 4.451822 = M\ 4451.82^{2};$$

der Barwert der ersten beiden Zahlungen ist aber

$$M\ 1000.— \times 1.886095 = M\ 1886.09^{5};$$

mithin berechnet sich der Barwert der aufgeschobenen Rente zu

$$\begin{array}{r} M\ 4451.82^{2} \\ \div\ „\ 1886.09^{5} \\ \hline M\ 2565.72^{7} \text{ (wie oben).} \end{array}$$

Lehrsatz 2. Man kann den Wert einer Rente für einen früheren Termin als den Anfang des ersten Rentenjahres durch Subtraktion eines Rentenfaktors von einem anderen berechnen.

Aufgabe 2. Eine Aktiengesellschaft hat bei ihrer Gründung die Verpflichtung übernommen, dem bisherigen Inhaber der Firma oder dessen Erben nach Ablauf von 10 Jahren 20 Jahre lang eine Postnumerando-Rente von M 10000.— zu zahlen. Mit welchem Betrage muß sie diese Ver-

Digitized by Google

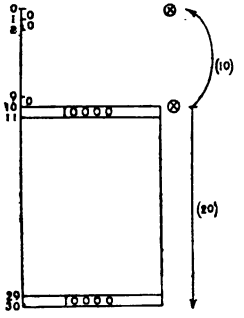
pflichtung unter die Passiven aufnehmen, wenn 4 % Zinseszinsen berechnet werden?

1. Zu Anfang des 11. Jahres ist der Barwert

M 10000.— × 13.590326 = M 135903.26.

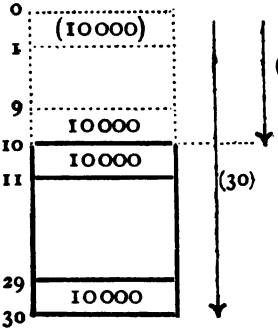
Der Barwert ist also heute

M 135903.26 × 0.675564 = M 91811.36.



13590326
465576
8154196
951323
67952
6795
816
54
9181136

2. Würden auch in den ersten 10 Jahren M 10000.— zu zahlen sein, so wäre der Barwert der 30 Zahlungen



M 10000 × 17.292033 = M 172920.33.

Der Barwert der ersten 10 Zahlungen ist aber

M 10000 × 8.110896 = M 81108.96.

Es sind daher zu reservieren

M 172920.33
÷ „ 81108.96
M 91811.37

(wie oben).

Daß der Barwert der Rente in der Bilanz zu erscheinen hat, unterliegt wohl keinem Zweifel. Fraglich ist jedoch, zu welchem Prozentsatz diskontiert werden soll. Dabei ist zu beachten, daß der Barwert um so kleiner wird, je höher der Diskontfuß ist. Bei 6 % würde sich z. B. ergeben

13.764831
÷ 7.360087
6.404744 × M 10000 = M 64047.44.

Die Frage nach der Höhe des Diskontfußes ist eine interne Bewertungsfrage und ihre Beantwortung der Gesellschaft daher in vernünftigen Grenzen anheimgestellt. Sie wird aber zu einer externen im Falle der

Digitized by Google

Liquidation. Da alsdann leicht Streitigkeiten über die Berechnung der Abfindungssummen entstehen können, so empfiehlt es sich, schon bei Abschluß des Vertrages den Diskontfuß für diesen Fall zu vereinbaren. Praktisch ist es dann (wenn auch nicht gerade notwendig), den vereinbarten Diskontfuß von vornherein der Berechnung des Barwertes zugrunde zu legen.

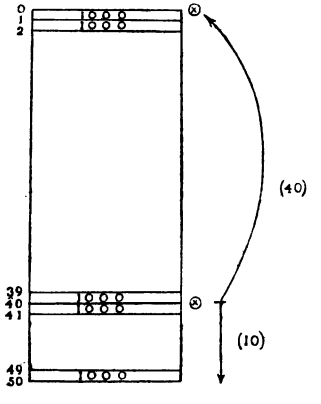
Das Rückstellungs-Konto ist am Ende jeden Jahres für 4% (resp. 6%) Zinsen zu erkennen und für die Auszahlung von M 10000.— zu belasten.

$$4\% \text{ auf } M\,91811.36 = M\,3672.45,$$
$$6\% \text{ „ „ } 64047.44 = \text{ „ } 3842.85.$$

Die Belastung des Zinsenkontos ist also um so größer, je kleiner der Barwert angenommen war. Dem Rückstellungskonto steht unter den Aktiven entweder ein Teilbetrag der Anlage oder ein Geschäftswert-Konto gegenüber. Beide müssen in einer gewissen Zeit abgeschrieben werden. Da die Abschreibungsquote um so größer ist, je größer der Barwert der Rente gewählt war, so ergibt sich bei einem großen Barwert eine große Abschreibungsquote und eine kleine Zinslast, bei einem kleinen Barwert eine kleine Abschreibungsquote und eine große Zinslast, wobei allerdings die Abschreibungsquote überwiegt, so daß die Wahl des Diskontfußes auch das Jahresergebnis beeinflußt.

γ) Abzinsung auf einen außerhalb der Tabelle liegenden Termin.

Aufgabe. Eine Gemeinde hat sich verpflichtet, einem Institut 50 Jahre lang am Ende des Jahres M 1000.— zuzuschießen. Mit welchem Betrage kann diese Verpflichtung abgelöst werden bei Berechnung von 4% jährlicher Zinsen?



1. Der Barwert der letzten 10 Zahlungen ist zu Anfang des 41. Jahres

$$M\,1000 \times 8.110896 = M\,8110.896.$$

Der Barwert der letzten 10 Zahlungen ist daher heute

$$M\,8110.896 \times 0.208289 = M\,1689.410.$$

	8110896
	982802
	1622179
	64887
	1622
	649
	73
	1689410

Digitized by Google

Der Barwert der ersten 40 Zahlungen ist heute

$$M\ 1000 \times 19.792774 = M\ 19792.774.$$

Der Barwert der 50 Zahlungen ist daher

$$\begin{array}{rr} & M\ 1689.410 \\ + & „\ 19792.774 \\ \hline & M\ 21482.18. \end{array}$$

2. Zerlegt man die Reihe von 50 Zahlungen in zwei Reihen von 20 und 30 Zahlungen, so erhält man als heutigen Wert der letzten 20 Zahlungen

$$M\ 1000 \times 13.590326 \times 0.308319 = M\ 4190.15^6$$

$$\begin{array}{r} 13590326 \\ 913803 \\ \hline 4077098 \\ 108723 \\ 4077 \\ 136 \\ 122 \\ \hline 4190156 \end{array}$$

und als Barwert der ersten 30 Zahlungen

$$M\ 1000 \times 17.29203^8 = M\ 17292.03^8,$$

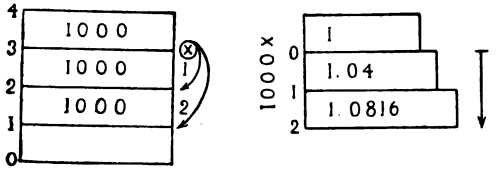
daher in Summa

$$\begin{array}{rr} & M\ 4190.15^6 \\ + & „\ 17292.03^8 \\ \hline & M\ 21482.19 \end{array} \qquad \text{(wie oben).}$$

Lehrsatz. Man kann eine Rentenreihe abzinsen, indem man sie beliebig in zwei Rentenreihen zerlegt und diese einzeln abzinst. Man muß dann aber noch den Barwert der einen um soviele Jahre abzinsen, wie die andere läuft.

c) Die Aufzinsung der Postnumerando-Rente.

Aufgabe 1. Zu welchem Betrage ist eine 3 malige Postnumerando-Rente am Ende des 3. Jahres angewachsen?



1. Am Ende des 3. Jahres sind die am Ende des 3. Jahres fälligen M 1000.— wert. Die am Ende des 2. Jahres fälligen M 1000.—

$$M\ 1000 \times 1$$

sind 1 Jahr aufzuzinsen und die am Ende des 1. Jahres fälligen 2 Jahre.

Digitized by Google

Die Endwerte sind daher

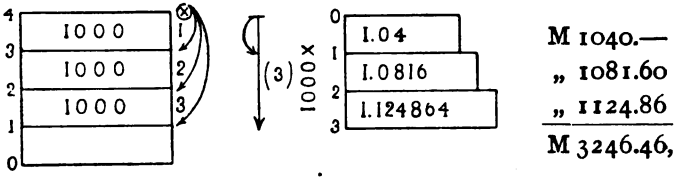
$$\begin{aligned} \text{M } 1000 \times 1.04 &= \text{M } 1040 \\ \text{„ } 1000 \times 1.0816 &= \text{„ } 1081.60 \\ &\text{M } 2121.60. \end{aligned}$$

Der Endwert der 3 Zahlungen ist daher

$$\begin{aligned} &\text{M } 1000.— \\ +\ &\text{„ } 2121.60 \\ &\text{M } 3121.60. \end{aligned}$$

Dabei ist M 2121.60 der Endwert einer zweijährigen Pränumerando-Rente.

2. Am Ende des 4. Jahres wäre der Endwert der 3 Zahlungen



M 1040.—
„ 1081.60
„ 1124.86
M 3246.46,

mithin ist der Endwert am Ende des 3. Jahres

$$\text{M } 3246.46 \times 0.961538 = \text{M } 3121.60.$$

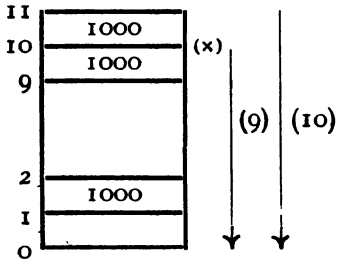
$$\begin{array}{r} 324646 \\ 835169 \\ \hline 2921814 \\ 194788 \\ 3247 \\ 1623 \\ 97 \\ 26 \\ \hline 3121595 \end{array}$$

Lehrsatz. Eine 3jährige Postnumerando-Rente zinst man auf, indem man entweder den Endwert einer 2jährigen Pränumerando-Rente um eine Rentenzahlung vermehrt, oder indem man den Endwert einer 3jährigen Pränumerando-Rente um 1 Jahr abzinst.

Das Ende eines Jahres und der Anfang des folgenden sind als ein und derselbe Zeitpunkt anzusehen.

Digitized by Google

Aufgabe 2. Jemand zahlt 10 mal am Ende jedes Jahres M 1000.— bei einer Bank ein. Über welchen Betrag kann er am Ende des 10. Jahres verfügen, wenn die Bank 4% jährliche Zinsen vergütet?



Nach dem Lehrsatz ergibt sich der Endwert:

1. M 1000 × 11.006107 =
M 11006.11
+ „ 1000.—
M 12006.11.

2. M 1000 × 12.486351 × 0.961538
= M 12006.10.

12486351
835169
11237716
749181
12486
6243
375
99
12006100

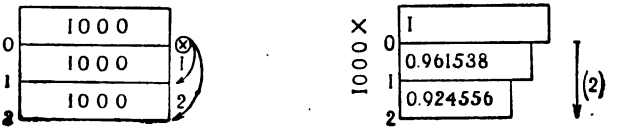
d) Die Abzinsung der Pränumerando-Rente.

Aufgabe. Welches ist der heutige Wert einer sofort beginnenden 3jährigen Pränumerando-Rente von jährlich M 1000.— bei Berechnung von 4% Zinseszinsen?

Die Überlegungen sind ganz entsprechend denen des vorigen Abschnittes.

1. Die heute fälligen M 1000.— sind mit

M 1000 × 1 = M 1000



in Rechnung zu stellen, während die Barwerte der nach 1, resp. nach 2 Jahren fälligen M 1000.— bezüglich

M 1000 × 0.961538 = M 961.53[8]
und „ 1000 × 0.924556 = „ 924.55[6]
Sa. M 1886.09[4]

Digitized by Google

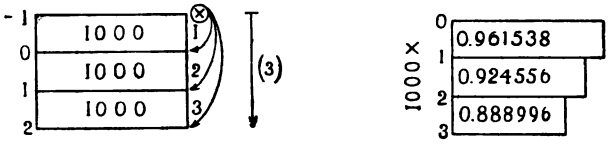
sind. Der Barwert der Pränumerando-Rente ist also

M 1000.—
+ „ 1886.09⁴
M 2886.09⁴,

wobei M 1886.094 der Barwert einer 2jährigen Postnumerando-Rente ist.

2. Heute vor 1 Jahre (— 1) war der Wert der heute fälligen M 1000.—

M 1000 × 0.961538 = M 961.53⁸ usw.



Der Barwert der Rente war also vor 1 Jahre

M 1000 × 2.775091 = M 2775.09¹,

mithin ist der Barwert heute (1 Jahr aufgezinst)

M 2775.09¹ × 1.04 = M 2886.09 (wie oben)

277509 × 104
11100
288609

Lehrsatz. Eine 3jährige Pränumerando-Rente zinst man ab, indem man entweder den diskontierten Wert einer 2jährigen Postnumerando-Rente um eine Rentenzahlung vermehrt oder indem man den diskontierten Wert einer 3jährigen Postnumerando-Rente um 1 Jahr aufzinst.

Anmerkung. Die Renten-Tabelle (Tafel II) dient zur Aufzinsung und Abzinsung sowohl der Pränumerando-, als auch der Postnumerando-Rente. Man wende aber die Rentenfaktoren niemals mechanisch an, sondern betrachte sie stets als Summen der Zinseszinsfaktoren (Tabele 1). Dabei achte man vor allem auf die Fälligkeit der ersten und der letzten Rate der Rente.

e) Berechnung des Rentenbetrages aus dem Renten-Aufzinsungsfaktor.

Aufgabe 1. Jemand wünscht, bei einer Bank in 3 Jahren ein Kapital von M 10000.— durch gleiche, am Anfang des Jahres zu leistende Einzahlungen anzusammeln. Wie hoch müssen diese sein, wenn die Bank 4% Zinsen vergütet?

Digitized by Google

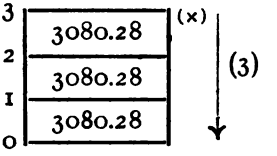
Zahlt der Betreffende jährlich M 1.— bei der Bank ein, so verfügt er nach 3 Jahren über M 3.246464.

M 3.246464 erhält man durch Einzahlung von jährlich M 1.—

„ 1 „ „ „ „ „ „ $\frac{\text{M } 1.—}{3.246464}$

„ 10000 „ „ „ „ „ „ $\frac{\text{M } 10000.—}{3.246464}$

$= \text{M } 3080.28.$



$3246464^4)$ 1000000 = 308028
26061
90
25

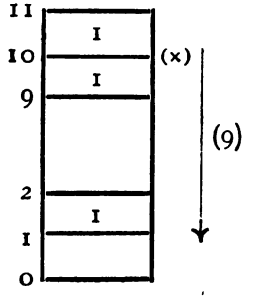
Probe. Eine 3jährige Pränumerando-Rente von jährlich M 3080.28 hat den Endwert von

$$\text{M } 3080.28 \times 3.246464 = \text{M } 10000.02$$

3246464
820803
9739392
259717
649
259
10000017

Aufgabe 2. Jemand wünscht, am Ende jedes Jahres einen bestimmten Betrag bei einer Bank einzuzahlen. Wie groß muß dieser sein, damit der Betreffende am Ende des 10. Jahres über M 51000.— verfügen kann?

Eine Postnumerando-Rente von jährlich M 1.— hat am Ende des 10. Jahres den Endwert (vgl. S. 22)



M 11.006107 + M 1.— = M 12.006107,

M 12.006107 erhält man durch Einzahlung von jährlich M 1.—

„ 1 erhält man durch Einzahlung von jährlich $\frac{\text{M } 1.—}{12.006107}$

„ 51000 erhält man durch Einzahlung von jährlich $\frac{\text{M } 51000}{12.006107}$

$= \text{M } 4247.84.$

Digitized by Google

Probe. Der Barwert der Rente ist

M 4247.84 × 12.006107 = M 51000.

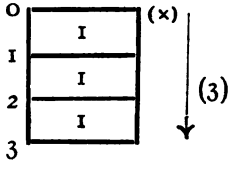
120061) 510000 = 424784

29756	424784
5744	70160021
941	4247840
101	849568
5	2548
.	43
	3
	5100002

f) Berechnung des Rentenbetrages aus dem Renten-Abzinsungsfaktor.

Aufgabe 1. Jemand zahlt M 10000.— bei einer Bank ein und wünscht, aus diesem Kapital eine gleichbleibende 3jährige Postnumerando-Rente zu beziehen. Wie groß kann diese sein, wenn die Bank 4% jährliche Zinsen vergütet?

Der Barwert einer 3maligen Postnumerando-Rente von jährlich M 1.— ist M 2.775091.



Aus einem Kapital von M 2.775091 kann eine Rente von jährlich M 1.— bezogen werden, aus einem Kapital von M 1.— jährlich $\frac{\text{M } 1.—}{2.775091}$, aus einem Kapital von M 10000 daher jährlich $\frac{\text{M } 10000}{2.775091}$

= M 3603.48.

277509[1]) 1000000 = 360348

167473
967
134
23
1

Aufgabe 2. Jemand verfügt über M 51000.— und wünscht, dafür eine 10jährige Pränumerando-Rente zu erwerben. Wie groß kann diese sein, wenn die Bank 4% Zinsen vergütet?

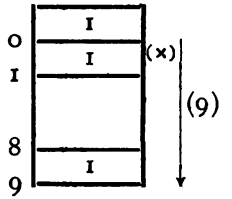
Der Barwert einer 10maligen Pränumerando-Rente von jährlich M 1.— ist (vgl. S. 24) heute

M 7.435332 + M 1.— = M 8.435332.

Aus dem Kapital von M 8.435332 kann man eine Rente von jährlich M 1.— erhalten, mithin aus M 51000.— eine Rente von

Digitized by Google

$$\frac{\text{M } 51\,000.-}{8.435332} = \text{M } 6046.-$$



$$843533^{2}) \quad 5100000 = 6045998$$
$$38801$$
$$5060$$
$$842$$
$$83$$
$$7$$

g) Ermittlung der Dauer der Rentenzahlung.

Aufgabe. Jemand besitzt ein Kapital von M 100000.—. Wie lange kann er daraus eine Rente von M 10000.— beziehen, wenn die Bank ihm 4% Zinsen vergütet, und welches ist der Kapitalrest zu Anfang des letzten Jahres?

Aus einem Kapital von M 100000.— kann man ebenso lange eine Rente von M 10000.— beziehen, wie aus einem Kapital von M 10.— eine solche von M 1.—. Nach der Tabelle ist der

Barwert einer 13jährigen Rente von M 1.— M 9.985648
und der einer 14jährigen Rente von M 1.— „ 10.563123.

Daraus folgt, daß man aus M 10.— eine 13jährige Rente von M 1.— beziehen kann, und daß am Ende des 13. Jahres noch ein Rest übrig bleibt.

Zerlegt man entsprechend das Kapital von M 100000.— in

ein Kapital von M 99856.48
und ein Zusatzkapital „ „ 143.52
Sa. M 100000.—

und denkt sich beide getrennt verwaltet, so ist das Kapital von M 99856.48 einschließlich jährlich 4% Zinsen gerade so groß, daß daraus eine 13malige Postnumerando-Rente von M 100000.— gezahlt werden kann, während das Zusatzkapital von M 143.52 sich jährlich um 4% Zinsen vermehrt. Es wächst daher in 13 Jahren an zu

$$\text{M } 143.52 \times 1.665074 = \text{M } 238.97.$$

14352
705661
14352
8611
861
72
1
23897

Digitized by Google

Soll der Kapitalrest erst nach 14 Jahren ausgezahlt werden, so ist er noch 1 Jahr aufzuzinsen, und es ergibt sich

$$M\ 238.97 \times 1.04 = M\ 248.53.$$

23897
956
24853

In diesem Fall hätte man das Zusatzkapital von M 143.52 gleich 14 Jahre aufzinsen können und hätte erhalten

$$M\ 143.52 \times 1.731676 = M\ 248.54 \text{ (wie oben).}$$

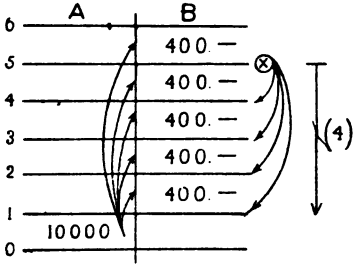
14352
861371
14352
10047
431
14
9
1
24854

Aus dem Kapital von M 100000.— kann man also 13 Jahre lang eine Postnumerando-Rente von M 10000.— und am Ende des 13. Jahres eine einmalige Zahlung von M 238.97, resp. am Ende des 14. Jahres eine solche von M 248.54 beziehen.

h) Beziehung der Zinseszinstabelle zur Renten-Tabelle.

α) Die Aufzinsung.

Aufgabe. Jemand hat M 10000.— bei einer Bank zu 4% angelegt und hebt jedesmal am Ende des Jahres die Zinsen ab. Diese trägt er zu einer anderen Bank, die ihm sein Guthaben ebenfalls mit 4% verzinst. Über welchen Betrag verfügt er am Ende des 5. Jahres?



Da bei der Bank A die Zinsen stets abgehoben werden, so tritt keine Vermehrung des Kapitals ein. Bei der Bank A ist also am Ende des 5. Jahres noch das Guthaben von M 10000.— vorhanden.

Bei der Bank B werden am Ende jedes Jahres M 400.— eingezahlt. Die Zahlungen stellen also eine 5malige Postnumerando-Rente dar.

Digitized by Google

Eine solche Rente von jährlich M 1.— hat den Endwert (vgl. S. 22)

$$M\ 1.— + M\ 4.416323 = M\ 5.416323,$$

mithin eine solche von jährlich M 400.—.

$$M\ 400.— \times M\ 5.416323 = M\ 2166.53.$$

Das Guthaben beträgt daher nach 5 Jahren

bei der Bank	A	M 10000.—
„ „ „	B	„ 2166.53
	Sa.	M 12166.53.

Über denselben Betrag würde der Betreffende verfügen können, wenn er die Zinsen bei der Bank A gelassen hätte, denn M 10000.— wachsen in 5 Jahren an zu

$$M\ 10000.— \times 1.216653 = M\ 12166.53.$$

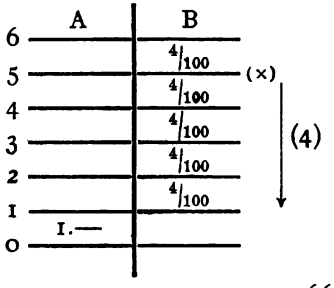
Der Wert der Rente ist mithin gleich dem Zinsgewinn aus M 10000.—

$$\begin{array}{r} M\ 12166.53 \\ \div\ „\ 10000.— \\ \hline M\ 2166.53. \end{array}$$

Auf M 1.— bezogen ergibt sich eine Postnumerando-Rente von $^4/_{100}$, deren Endwert

$$(1 + 4.416323).\ ^4/_{100}$$

ist.



Lehrsatz 1. Der 5jährige Zinseszinsgewinn aus M 1.— ist gleich dem Endwerte einer 5jährigen Postnumerando-Rente in der Höhe von M 0.04.

Der Zinsgewinn aus M 1.— ist in 5 Jahren

$$1.216653 - 1 = 0.216653$$

und ist also gleich dem Endwert der Rente:

$$0.216653 = (1 + 4.416323).\ ^4/_{100}$$

oder

$$0.216653.\ ^{100}/_4 = 1 + 4.416323.$$

Lehrsatz 2. Multipliziert man den um 1 verminderten 5. Aufzinsungsfaktor der Zinseszinstafel mit $^{100}/_4$, so erhält man den um 1 vermehrten 4. Aufzinsungsfaktor der Rententafel.

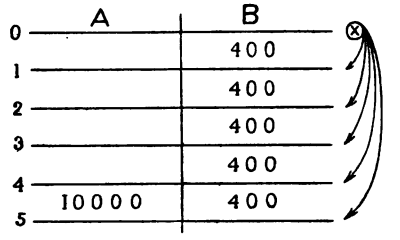
β) Die Abzinsung.

Aufgabe. Jemand schuldet der Bank A in 5 Jahren den Betrag von M 10000.— und ferner der Bank B eine 5malige am Ende jedes Jahres

Digitized by Google

zu leistende Zahlung von M 400.—. Mit welchem Betrage kann er die gesamte Schuld heute begleichen?

Der Barwert der Schuld von M 10000.— bei der Bank A ist bei Berechnung von 4% Zinsen



M 10000.— × 0.821927
= M 8219.27,

(5) und der Barwert der Rentenschuld von jährlich M 400.— bei der Bank B ist

M 400.— × 4.451822
= M 1780.73.

Der Barwert der Schuld bei A und B zusammen beträgt also

A.	M	8219.27
B.	„	1780.73
Sa.	M	10000.—.

Die Schuld bei A könnte heute mit M 8219.27 abgelöst werden. Würde der Schuldner heute M 10000.— zahlen, so erlitte er einen Zinsverlust von

	M	10000.—
÷	„	8219.27
	M	1780.73,

und dieser Zinsverlust wäre gerade gleich dem Barwert der an B zahlbaren Rente. Bei Zahlung von M 10000.— kann also der Bank A die Verpflichtung auferlegt werden, die Schuld an B zu übernehmen.

Auf M 1.— bezogen ist der Zinsverlust

$$\begin{array}{r} 1 \\ \div\ 0.821927 \\ \hline 0.178073 \end{array}$$

und der Barwert der Rente

$$4.451822 \times {}^{4}/_{100}.$$

Es ist daher

$$0.178073 = 4.451822 \times {}^{4}/_{100}.$$

Lehrsatz 1. Der 5jährige Zinsverlust an M 1.— ist gleich dem Barwert einer 5jährigen Postnumerando-Rente in der Höhe von M 0.04.

Aus $1 - 0.821927 = 4.451822 \times {}^{4}/_{100}$

folgt $(1 - 0.821927).{}^{100}/_{4} = 4.451822.$

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Subtrahiert man den 5. Abzinsungsfaktor der Zinseszinstabelle von 1 und multipliziert die Differenz mit $^{100}/_{4}$, so erhält man den 5. Abzinsungsfaktor der Rententabelle.

Anhang. Die ewige Rente.

a) Die Postnumerando-Rente.

Aufgabe 1. Eine Stadt hat sich verpflichtet, einem Institut für alle Zeit am Ende jedes Jahres einen Zuschuß von M 10000.— zu gewähren Mit welchem Betrage kann diese Verpflichtung abgelöst werden, wenn 4% Zinsen berechnet werden?

Nach der Rententafel ist der Barwert

einer	10jährigen		Rente	8.110896	
„	20	„	„	13.590326	
„	30	„	„	17.292033	
„	40	„	„	19.792774	
„	50	„	„	21.482185	(vgl. S. 21)
„	60	„	„	22.623490	
„	70	„	„	23.394515	
„	80	„	„	23.915392	
„	90	„	„	24.267278	
„	100	„	„	24.504999.	

Man sieht, daß der Barwert sich bei sehr langer Rentendauer nur noch sehr wenig ändert. Für eine 200jährige Rente ergibt sich z. B. als Barwert nur 24.990198, so daß der Barwert bei einer Verlängerung der Rentendauer von 100 auf 200 Jahre sich nur noch um 0.485199 ändert.

Setzt man die Rechnung fort, so findet man, daß sich der Barwert einer 400jährigen Rente von dem einer 500jährigen nur noch in der 6. Dezimalstelle unterscheidet, während die Differenz in den Barwerten beim Übergang von einer 500jährigen zu einer 600jährigen Rente schon in die 8. Stelle rückt, die 6. Stelle daher nicht mehr beeinflußt.

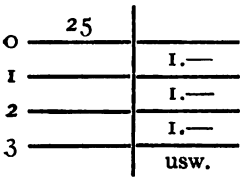
Barwert einer

100jährigen		Rente	24.504999
200	„	„	24.990198
300	„	„	24.999805
400	„	„	24.999995
500	„	,	24.999999^{96}

Digitized by Google

Lehrsatz. Bei Berechnung von 4% Zinseszinsen ist mit hinreichender Genauigkeit (auf 6 Dezimalen) der Barwert einer 500jährigen Rente gleich dem einer ewigen Rente.

Einfacher und genauer gelangt man zur Berechnung des Barwertes einer ewigen Rente durch folgende Überlegung:



Legt man M 25.— bei 4% auf Zinsen, so erhält man am Ende jedes Jahres M 1.—. Die M 25.— sind also Träger einer ewigen Rente von jährlich M 1.—, d. h. sie sind der Barwert einer ewigen Rente von M 1.—. Wohl zu beachten ist aber, daß die M 25.— durch die Rente nicht aufgezehrt werden.

Legt man M 400.— × 4.451822 = M 1780.73 4%ig auf Zinsen, so kann man aus dem Betrage 5 Jahre lang eine Rente von M 400.— beziehen. Am Ende des 5. Jahres ist aber das Kapital vollständig aufgezehrt. Legt man dagegen M 10000.— auf Zinsen, so kann man ebenfalls 5 Jahre lang (oder länger) eine Rente von M 400.— beziehen, kann aber nach 5 Jahren die vollen M 10000.— wieder abheben.

Da M 25.— Träger einer ewigen Rente von M 1.— sind, so kann die Rente von M 10000.— durch das Kapital von M 250000.— abgelöst werden.

Das Wesen der ewigen Rente liegt deshalb nicht in der ewigen Dauer (diese kommt für die Praxis nicht in Betracht), sondern in dem Umstande, daß sie das Kapital, dem sie entspringt, nicht verringert.

Man denke sich folgende Fälle:

A gewährt jemandem eine 4%ige Hypothek von M 100000.—, die nach 36 Jahren zurückgezahlt werden soll. A bezieht dann während der 36 Jahre eine Rente von M 4000.— und erhält nach dieser Zeit M 100000.— zurück.

B gewährt jemandem eine 4%ige Hypothek von M 75000.—, die jährlich mit $1\frac{1}{8}$% amortisiert werden soll. B bezieht ebenfalls während der Dauer von 36 Jahren eine Rente von M 4000.—. Nach Ablauf dieser Zeit ist aber sein Kapital von M 75000.— vollständig durch die Amortisationsquote getilgt, und damit hört seine Rente von selbst auf. Die Rente des B ist daher als eine endliche, die des A als eine ewige zu behandeln, auch wenn sie nur 5 oder 6 Jahre lang bezogen werden sollte.

Aufgabe 2. Ein 3%iges Rentenpapier hat einen Nominalwert von

Digitized by Google

M 1000.—. Wieviel wird jemand dafür zahlen, der von seiner Anlage eine 4%ige Verzinsung erwartet?

0	1000.—	
1		30.—
2		30.—
3		30.—
		usw.

0	750.—	
1		30.— = 4%
2		30.— = 4%
3		30.— = 4%
		usw.

Das Papier ist Träger einer ewigen Rente von M 30.—. Der Käufer verlangt aber aus M 1000.— eine Rente von M 40.—. Er wird deshalb für eine Rente von M 30.— nur

$$\frac{\text{M } 1000.— \times 30}{40} = \text{M } 750.—$$

zahlen.

b) Die Pränumerando-Rente.

Aufgabe. Wie hoch berechnet sich die Abfindungssumme der obigen Aufgabe 1, wenn der Zuschuß von M 10000.— am Anfang jedes Jahres zu zahlen ist?

1. Da M 250000.— gleichwertig sind mit einer ewigen Postnumerando-Rente von M 10000.—, so sind die zu Anfang des 1. Jahres (nach 0 Jahren) fälligen M 10000.— besonders abzulösen. Die gesamte Ablösungssumme beträgt also

M 250000.—
+ „ 10000.—
M 260000.—.

2. Vor einem Jahre (— 1) repräsentierte die Rente einschließlich der zeute fälligen M 10000.— eine Postnumerando-Rente von jährlich M 10000.—, die damals mit M 250000.— hätte abgelöst werden können. Der Barwert ist also heute

M 250000.—
+ 4% „ 10000.—
M 260000.— (wie oben).

Digitized by Google

3. Halbjährliche Verzinsung.

a) Die Aufzinsung.

Aufgabe 1. Zu welchem Betrage wächst ein Kapital von M 1000.— in 2 Jahren an, wenn halbjährlich 2% Zinsen vergütet werden?

Durch halbjährlichen Zinszuschlag erhält man

			Endwert.
		M 1000.—	
	+ 2%	„ 20.—	
$1/2$		M 1020.—	1020.—
	+ 2%	„ 20.40	
1		M 1040.40	1040.40
	+ 2%	„ 20.81	
$1\,1/2$		M 1061.21	1061.21
	+ 2%	„ 21.22	
2		M 1082.43	1082.43

Die Überlegungen sind ganz entsprechend den früheren.

M 1.— wächst in 1 Halbjahr an zu 1.02

„ 1.02 „ „ 1 „ „ „ 1.02×1.02

d. h.

M 1.— „ „ 2 „ „ „ $1.02 \times 1.02 = (1.02)^2$

„ 1.— „ „ 3 „ „ „ $1.02 \times 1.02 \times 1.02 = (1.02)^3$

In tabellarischer Übersicht ergibt sich

(0)	1	$= 1$
(1)	1.02	$= (1.02)^1$
(2)	1.0404	$= (1.02)^2$
(3)	1.061208	$= (1.02)^3$
(4)	1.082432	$= (1.02)^4$

u. s. w. (vgl. S. 2 und Tab. III).

Lehrsatz 1. Die Aufzinsung bei 2% Halbjahrszinsen ist mit Hilfe der 2%igen Tabelle ebenso vorzunehmen wie die Aufzinsung bei 4% Jahreszinsen mit Hilfe der 4%igen Tabelle.

Aufgabe 2. Zu welchem Betrage wächst ein Kapital von M 50000.— in 15 Jahren durch 2% halbjährliche Zinseszinsen an?

Digitized by Google

M 1.— wächst in 30 Halbjahren an zu M 1.811362,
mithin wachsen „ 50000.— „ 30 „ „ „ „ 50000 × 1.811362
= M 90568.10.

Aufgabe 3. Zu welchem Betrage wäre obiges Kapital in derselben Zeit durch 4% jährliche Zinseszinsen angewachsen?

Nach der 4%igen Tabelle wächst M 1.— in 15 Jahren an zu M 1.800944, daher M 50000.— zu

$$M\ 50000 \times 1.800944 = M\ 90047.20.$$

Die Differenz in den Endwerten bei halbjährlich mit 2% und jährlich mit 4% aufgezinstem Kapital beträgt

	M 90568.10	(2% halbjährlich)
÷	„ 90047.20	(4% jährlich)
	M 520.90.	

Lehrsatz 2. 2% halbjährliche Zinsen ergeben eine höhere Verzinsung als 4% ganzjährliche Zinsen.

b) Beziehung der halbjährlichen Verzinsung zur ganzjährlichen.

Aufgabe 1. Welchem jährlichen Zinsfuß entspricht ein halbjährlicher von 2%?

Bei 2% halbjährlicher Verzinsung wächst M 1.— in 1 Jahre an zu

	1
+ 2%	0.02
	1.02
+ 2%	204
	M 1.0404.

Dasselbe Resultat würde sich bei einem ganzjährlichen Zuschlag von 4.04% ergeben.

Zinst man z. B. ein Kapital von M 1000.— 2 Jahre bei einem jährlichen Zinsfuß von 4.04% auf, so ergibt sich

	M 1000.—	(× 1.0404)
+ 4.04%	„ 40.40	
	M 1040.40	(× 1.0404)
+ 4.04%	„ 41.616	
	416	
	M 1082.43².	

Digitized by Google

Dasselbe Resultat erhält man durch Aufzinsung mit halbjährlich 2% (siehe Tabelle III)

$$\text{M } 1000 \times 1.082432 = \text{M } 1082.43^2.$$

Lehrsatz 1. Einer 2%igen halbjährlichen Verzinsung entspricht eine 4.04%ige ganzjährliche.

Aufgabe 2. Welchem jährlichen Zinsfuß entspricht ein halbjährlicher von $2\frac{1}{4}\%$?

M 1.— wächst bei $2\frac{1}{4}\%$ in 2 Halbjahren an zu

$$(1.02\frac{1}{4}) \times (1.02\frac{1}{4}) = (1.02\frac{1}{4})^2 = 1.04550625.$$

$$\begin{array}{r} 10225 \times 10225 \\ 20450 \\ 20450 \\ 51125 \\ \hline 104550625 \end{array}$$

Mithin entspricht einem Zinsfuß von halbjährlich $2\frac{1}{4}\%$ ein solcher von jährlich 4.550625%.

Aufgabe 3. Welchem halbjährlichen Zinsfuß entspricht ein ganzjährlicher von 4%?

Einem jährlichen Zinsfuß von 4.04% entspricht ein halbjährlicher von 2%. Der gesuchte Zinsfuß wird also kleiner sein als 2% und zwar etwa 1% von 2%. Er stellt sich in erster Annäherung auf 1.98%. Einem Zinsfuß von halbjährlich 1.98% entspricht aber ein ganzjährlicher von 3.999204%, denn

$$1.0198 \times 1.0198 = 1.03999204.$$

1.98% ist also etwas zu klein. Genauer erhält man als entsprechenden halbjährlichen Zinsfuß 1.980390%, denn

$$(1.01980390) \times (1.01980390) = 1.03999999^4 \text{ *}).$$

---

*) Bei Verwendung von elementaren Rechnungen kann der konforme Zinsfuß nur durch Probieren gefunden werden. Mathematisch genau ergibt sich der erste Aufzinsungsfaktor (1.01980390) als $\sqrt{1.04}$. Durch abgekürzte Wurzelausziehung erhält man

$$\begin{array}{rl} \sqrt{104} = & 101980390 \\ 201) & 400 \\ 2029) & 19900 \\ 20388) & 163900 \\ & 796 \\ & 184 \\ & 1 \end{array}$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{r}
101980390 \\
\underline{093089101} \\
1019803900 \\
10198039 \\
9178235 \\
815843 \\
3060 \\
\underline{917} \\
1039999994
\end{array}
$$

Lehrsatz 2. Einem ganzjährlichen Zinsfuß von 4% entspricht ein halbjährlicher von 1.980390%, d. h. M 1.— wächst bei 4%iger jährlicher Verzinsung in einem halben Jahre an zu M 1.01980390. Man nennt den Zinsfuß 1.980390 den konformen halbjährlichen Zinsfuß zu 4%.

Anmerkung 1. Ob der konforme Zinsfuß von 1.980390 oder der halbjährliche von 2% (oder gar ein ganz anderer) anzuwenden ist, entscheidet die Natur des zu behandelnden Falles.

Anmerkung 2. In der Regel versteht man unter 4% jährlichen Zinsen bei halbjährlichem Zinszuschlag einen halbjährlichen Zinsfuß von 2%.

Anmerkung 3. Innerhalb einer Zinsperiode werden in der Regel keine Zinseszinsen gerechnet. Z. B. sind 4% Zinsen für 27 Tage zu rechnen als

$$\frac{4 \times 27}{360} = 0.30\% \left(\text{resp. } \frac{4 \times 27}{365} = 0.2959\%\right).$$

c) Beziehung der vierteljährlichen Verzinsung zur halbjährlichen und ganzjährlichen.

Werden vierteljährlich 1% Zinsen gewährt, so wächst M 1.— an zu

$$
\begin{array}{rr}
 & 1 \\
+ 1\% & \underline{0.01} \\
(1) & 1.01 \\
+ 1\% & \underline{\quad 101} \\
(2) & 1.0201 \\
+ 1\% & \underline{\quad 10201} \\
(3) & 1.030301 \\
+ 1\% & \underline{\quad 10303} \\
(4) & 1.040604.
\end{array}
$$

Digitized by Google

Die Beziehung der vierteljährlichen Verzinsung zur halbjährlichen und jährlichen soll aber nicht näher erörtert werden. Wir wollen uns mit der Wiedergabe einiger Resultate begnügen.

Lehrsatz 1. Einer 1%igen vierteljährlichen Verzinsung entspricht eine 4.06%ige ganzjährliche und eine 2.01%ige halbjährliche.

Lehrsatz 2. Einem ganzjährlichen Zinsfuß von 4% ist ein vierteljährlicher Zinsfuß von 0.98534% konform. Dieser ist zugleich konform mit dem halbjährlichen konformen Zinsfuß von 1.980390%.

Lehrsatz 3. Einer halbjährlichen Verzinsung von 2% entspricht eine vierteljährliche von 0.9950494%.

d) Die Aufzinsung (Fortsetzung).

Aufgabe. Zu welchem Betrage wächst ein Kapital von M 10000.— in $2\frac{1}{2}$ Jahren bei 4%iger jährlicher Verzinsung an?

Diese Frage kann man nur richtig beantworten, wenn man den Zeitpunkt des Zinszuschlages berücksichtigt, und wenn man weiß, welcher Zinsfuß bei einem Bruchteil eines Jahres in Anwendung zu bringen ist.

Angenommen, die M 10000.— seien bei einer Bank eingezahlt worden, die am 31. Dezember Zinsen gutschreibt und zwar für ein volles Jahr 4%, für einen Bruchteil eines Jahres aber (in der üblichen kaufmännischen Weise) 4% multipliziert mit diesem Bruchteil. Es mögen dann drei Fälle behandelt werden, die die Lage wohl hinreichend klären werden.

1. Das Kapital von M 10000.— wird am 31. Dezember 1910 eingezahlt. Die Abrechnung ergibt dann

1910, 31. Dezember	M	10000.—	(× 1.04)
+ 4%	„	400.—	
1911, 31. „	M	10400.—	(× 1.04)
+ 4%	„	416.—	
1912, 31. „	M	10816.—	(× 1.02)
+ 4% / 90 Tage = 2%	„	216.32	
1913, 30. Juni	M	11032.32.	

Der Endwert berechnet sich also nach der Formel

$$M\ 10000 \times 1.04 \times 1.04 \times 1.02$$
$$= „\ 10000 \times 1.0816 \times 1.02.$$

2. Das Kapital von M 10000.— wird am 30. Juni 1910 eingezahlt. Die Abrechnung ergibt

Digitized by Google

1910, 30. Juni		M 10000.—	(× 1.02)
+ 4 % 180 Tage = 2 %		„ 200.—	
1911, 31. Dezember		M 10200.—	(× 1.04)
	+ 4 %	„ 408.—	
1912, 31. „		M 10608.—	(× 1.04)
	+ 4 %	„ 424.32	
1913, 31. „		M 11032.32	(wie oben).

Der Endwert berechnet sich nach der Formel

$$\text{M } 10000 \times 1.02 \times 1.04 \times 1.04$$
$$= \text{„ } 10000 \times 1.02 \times 1.0816.$$

Da die Stellung der Faktoren beliebig ist, so stimmt diese Formel mit der sub 1

$$\text{M } 10000 \times 1.0816 \times 102$$

überein.

3. Das Kapital wird am 30. September 1910 eingezahlt. Die Abrechnung ergibt:

1910, 30. September		M 10000.—	(× 1.01)
+ 4 % / 90 Tage = 1 %		„ 100.—	
1910, 31. Dezember		M 10100.—	(× 1.04)
	+ 4 %	„ 404.—	
1911, 31. „		M 10504.—	(× 1.04)
	+ 4 %	„ 420.16	
1912, 31. „		M 10924.16	(× 1.01)
+ 4 % / 90 Tage = 1 %		„ 109.24	
1913, 31. März		M 11033.40.	

Der Endwert berechnet sich nach der Formel

$$\text{M } 10000 \times 1.01 \times 1.04 \times 1.04 \times 1.01$$
$$= \text{„ } 10000 \times 1.0816 \times 1.01 \times 1.01;$$

es ist aber $1.01 \times 1.01 = 1.0201$,

so daß die Formel die Gestalt

$$\text{M } 10000 \times 1.0816 \times 1.0201$$

annimmt und sich von den Formeln sub 1 und 2 unterscheidet.

Lehrsatz. Soll ein Kapital $2\frac{1}{2}$ Jahre lang aufgezinst werden, so kann man es entweder zuerst 2 Jahre und dann $\frac{1}{2}$ Jahr aufzinsen oder zuerst $\frac{1}{2}$ Jahr und dann 2 Jahre. Zinst man jedoch zuerst

Digitized by Google

$^1/_4$ Jahr, dann 2 Jahre, und endlich noch $^1/_4$ Jahr auf, so erhält man ein ein wenig größeres Resultat.

Anmerkung. Bei Anwendung der konformen Zinsfüße tritt diese Abweichung nicht ein.

e) Die Abzinsung.

Aufgabe 1. Welchen Barwert hat ein in 2 Jahren fälliges Kapital von M 1000.— bei Berechnung von halbjährlich 2 % Zinsen?

Nach der 2 %igen Tabelle ist der

Barwert von M 1.—, fällig nach 4 Halbjahren, 0.923845,

mithin ist der

Barwert von M 1000.—, fällig nach 4 Halbjahren, M 1000 × 0.923845,

= M 923.85.

Probe. Zahlt man heute M 923.85 bei einer Bank ein, die 2 % Halbjahrszinsen vergütet, so erhält man nach 2 Jahren

M 923.85 × 1.082432 = M 1000.—

92385
2342801

923850
73908
1848
369
28
2

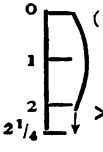
1000005

Lehrsatz 1. Die Abzinsung bei 2 % Halbjahrszinsen ist mit Hilfe der 2 %igen Tabelle ebenso vorzunehmen, wie die Abzinsung bei 4 % Jahreszinsen mit Hilfe der 4 %igen Tabelle.

Aufgabe 2. Welchen Barwert hat ein in $2^1/_4$ Jahren fälliges Kapital von M 10000.— bei Berechnung von 2 % halbjährlichen Zinsen?

Auch hier sind wieder verschiedene Fälle zu behandeln (vgl. S. 39).

1. Das Kapital ist zunächst $^1/_4$ Jahr, dann $^4/_2$ Jahre abzuzinsen.



M 1.— wächst in $^1/_4$ Jahre zu M 1.01 an; mithin ist der Barwert von M 1.—, die nach $^1/_4$ Jahre fällig ist,

$$\frac{1}{1.01} = 0.990099.$$

Dasselbe erhält man durch Abzug von 1 % auf Hundert.

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 \\
\div & 0.01 \\
\hline
 & 0.99 \\
+ & \quad 001 \\
\hline
 & 0.9901 \\
\div & \quad\quad 001 \\
\hline
 & 0.990099.
\end{array}
$$

M 10000.—, $^1/_4$ Jahr abgezinst, sind daher

$$\text{M } 10000 \times 0.990099 = 9900.99.$$

Zinst man diesen Betrag noch 4 Halbjahre ab, so ergibt sich

$$\text{M } 9900.99 \times 0.923845 = \text{M } 9146.98.$$

$$
\begin{array}{r}
923845 \\
990099 \\
\hline
8314605 \\
831461 \\
831 \\
83 \\
\hline
9146980
\end{array}
$$

Der Barwert berechnet sich nach der Formel

$$\text{M } 10000 \times \frac{1}{1.01} \times \frac{1}{(1.02)^4}$$

$$= \text{M } 10000 = 0.990099 \times 0.923845.$$

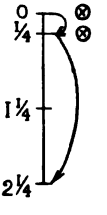
2. Das Kapital ist zunächst 2 Jahre und dann $^1/_4$ Jahr abzuzinsen.

Der Barwert von M 10000.—, die nach 2 Jahren (4 Halbjahren) fällig sind, ist

$$\text{M } 10000 \times 0.923845 = \text{M } 9238.45.$$

Zinst man diesen Betrag noch $^1/_4$ Jahr ab, so erhält man

$$\text{M } 9238.45 \times \frac{1}{1.01} = \text{M } 9146.98.$$



$$
\begin{array}{rr}
 & 9238.45 \\
\div 1\,\% & \quad 92.38 \\
\hline
 & 9146.07 \\
+ 1\,\% & \quad\quad 92 \\
\hline
 & 9146.99 \\
\div 1\,\% & \quad\quad\ 1 \\
\hline
 & 9146.98
\end{array}
$$

Digitized by Google

Der Barwert berechnet sich nach der Formel

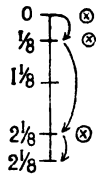
$$M\ 10000 \times \frac{1}{(1.02)^4} \times \frac{1}{1.01}$$

$$= M\ 10000 \times 0.923845 \times 0.990099$$

$$= \text{„}\ 10000 \times 0.990099 \times 0.923845 \quad \text{(wie oben).}$$

3. Das Kapital wird zunächst $^1/_8$ Jahr, dann $^4/_2$ Jahre und dann noch $^1/_8$ Jahr abgezinst.

M 10000.—, $^1/_8$ Jahr abgezinst, ergeben



$$M\ 10000 \times \frac{1}{1.005} = M\ 9950.25.$$

	10000.—
÷ ½ %	50.—
	9950.—
+ ½ %	—.25
	9950.25

M 9950.25, $^4/_2$ Jahre abgezinst, geben

$$M\ 9950.25 \times 0.923845 = M\ 9192.49.$$

923845
520599
8314605
831461
46192
185
46
9192489

M 9192.49, $^1/_8$ Jahr abgezinst, ergeben

$$M\ 9192.49 \times \frac{1}{1.005} = 9146.76.$$

	9192.49
÷ ½ %	45.96
	9146.53
+ ½ %	—.23
	9146.76.

Der Barwert berechnet sich nach der Formel

$$M\ 10000 \times \frac{1}{1.005} \times \frac{1}{(1.02)^4} \times \frac{1}{1.005}$$

$$= M\ 10000 \times \frac{1}{(1.005)^2} \times \frac{1}{(1.02)^4}.$$

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 1005 \times 1005 \\ \underline{5025} \\ 1010025 \end{array}$$

oder

$$= \text{M } 10000 \times 0.995025 \times 0.923845 \times 0.995025$$
$$= \text{„ } 10000 \times 0.990075 \times 0.923845$$
$$= \text{„ } 9146.76.$$

905025	990075
520599	548329
8955225	8910675
895523	198015
49751	29702
199	7920
50	396
9900748	50
	9146758

Lehrsatz 2. Soll ein Kapital $2^1/_4$ Jahre abgezinst werden, so kann man es zunächst $^1/_4$ Jahr und dann 2 Jahre abzinsen oder zunächst 2 Jahre und dann $^1/_4$ Jahr.

Zinst man jedoch zuerst $^1/_8$ Jahr, dann 2 Jahre und endlich noch $^1/_8$ Jahr ab, so erhält man ein ein wenig kleineres Resultat (vgl. S. 40).

Anmerkung. Bei Verwendung der konformen Zinsfüße tritt diese Abweichung nicht ein.

Digitized by Google

4. Halbjährliche Renten.

a) Bei halbjährlicher Verzinsung.

Aufgabe 1. Jemand zahlt zu Anfang jedes Halbjahres M 1000.— bei einer Bank ein, die halbjährlich 2% Zinsen vergütet. Über welchen Betrag kann er am Ende des 2. Jahres verfügen?

Der Endwert der Einzahlungen beträgt

		Endwert, 1000 ×
	M 1000.—	
+ 2%	„ 20.—	
nach $\frac{1}{2}$ Jahre	M 1020.—	1.02
+	„ 1000.—	
	M 2020.—	
+ 2%	„ 40.40	
nach 1 Jahr	M 2060.40	2.0604
+	„ 1000.—	
	M 3060.40	
+ 2%	„ 61.21	
nach 1$\frac{1}{2}$ Jahren	M 3121.61	3.12161
+	„ 1000.—	
	M 4121.61	
+ 2%	„ 82.43	
nach 2 Jahren	M 4204.04	4.204

Lehrsatz 1. Die Aufzinsung einer halbjährlichen Rente bei 2% Halbjahrszinsen ist mit Hilfe der 2%igen Rententafel ebenso vorzunehmen, wie die Aufzinsung einer jährlichen Rente bei 4% Jahreszinsen mit Hilfe der 4%igen Rententafel.

Aufgabe 2. Welchen Barwert hat eine viermalige, am Ende jedes Halbjahres mit M 1000.— zahlbare Rente?

Nach der 2%igen Rententafel ist der Barwert einer viermaligen Postnumerando-Rente von halbjährlich M 1.— gleich M 3.807729, mithin der einer Rente von halbjährlich M 1000.—

$$\text{M } 1000 \times 3.807729 = \text{M } 3807.73.$$

Digitized by Google

Probe:		3807.73
	+ 2 %	76.15
		3883.88
	÷	1000.—
nach $^1/_2$ Jahr		2883.88
	+ 2 %	57.68
		2941.56
	÷	1000.—
nach 1 Jahr		1941.56
	+ 2 %	38.83
		1980.39
	÷	1000.—
nach 1 $^1/_2$ Jahren		980.39
	+ 2 %	19.61
		1000.—
	÷	1000.—
nach 2 Jahren		0

Lehrsatz 2. Die Abzinsung einer halbjährlichen Rente bei 2% Halbjahrszinsen ist mit Hilfe der 2%igen Rententafel ebenso vorzunehmen, wie die Abzinsung einer jährlichen Rente bei 4% Jahreszinsen mit Hilfe der 4%igen Rententafel.

Aufgabe 3. Welchen Preis wird jemand für ein Rentenpapier, welches auf M 1000.— lautet und halbjährlich 1 $^1/_2$% Zinsen abwirft, zahlen, wenn er sein Geld halbjährlich mit 2% verzinsen will?

Die Überlegungen sind ganz entsprechend den früheren (S. 34).

	1000	
0		
		15.—
$^1/_2$		
		15.—
1		
		usw.

	(750)	
0		
		15.— = 2%
$^1/_2$		
		15.— = 2%
1		
		usw.

Das Papier ist Träger einer ewigen Rente von halbjährlich M 15.—. Der Käufer verlangt aber aus M 1000.— halbjährlich M 20.—, mithin wird er für halbjährlich M 15.— nur

$$\frac{\text{M } 1000 \times 15}{20} = \text{M } 750.—$$

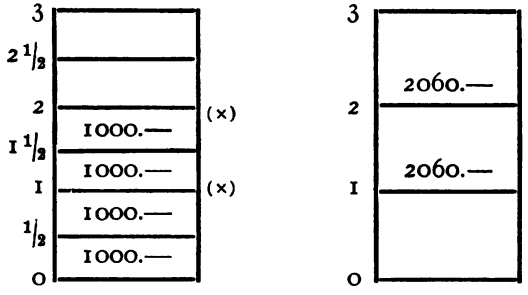
zahlen.

Digitized by Google

b) Bei ganzjährlicher Verzinsung.

α) Die Aufzinsung.

Aufgabe 1. Jemand zahlt zu Anfang jedes Halbjahres M 1000.— bei einer Bank ein, die jährlich 4% Zinsen vergütet. Über welchen Betrag kann er am Ende des 2. Jahres verfügen?



Die nach 0 Jahren (heute) eingezahlten M 1000.— haben am Ende des 1. Jahres den Endwert

$$M\ 1000 \times 1.04 = M\ 1040.—,$$

und die nach $^1/_2$ Jahre eingezahlten M 1000.— haben am Ende des 1. Jahres den Endwert (siehe S. 38, Anm. 2.)

$$M\ 1000 \times 1.02 = M\ 1020.—.$$

Der Endwert der im 1. Jahre geleisteten Zahlungen ist daher am Ende des Jahres

$$\begin{array}{r} M\ 1040.— \\ „\ 1020.— \\ \hline M\ 2060.—. \end{array}$$

Ebenso ist der Endwert der im Laufe des 2. Jahres geleisteten Zahlung am Ende des 2 Jahres

$$M\ 2060.—,$$

so daß man also die Zahlungen von M 1000.— zu Anfang jedes Halbjahres ersetzen kann durch Zahlungen von M 2060.— am Ende jedes Jahres.

Der Endwert einer zweimaligen Postnumerando-Rente von M 1.— ist (siehe S. 22)

$$1 + 1.04 = 2.04,$$

mithin der einer Rente von M 2060.—

$$M\ 2060 \times 2.04 = M\ 4202.40.$$

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 206 \times 202 \\ \hline 412 \\ 824 \\ \hline 42024 \end{array}$$

Erteilt die Bank am Ende des 2. Jahres Kontokorrent-Abrechnung, so zeigt die Staffel folgendes Bild:

				Tage	#
Dez.	31.	H.	M 1000.—	180	1800
Juni	30.	„	„ 1000.—		
		H.	M 2000.—	180	3600
					5400
		+	„ 60.—, 4% Zinsen a/ 5400 #		
			M 2060.— Val. p. 31. Dez.		
Dez.	31.	H.	M 2060.—	180	5508
„	31.	„	„ 1000.—		
		H.	M 3060.—	180	7308
Juni	30.	„	„ 1000.—		12816
		H.	M 4060.—		
		+	„ 142.40, 4% Zinsen a/ 12816 #		
			M 4202.40 Val. p. 31. Dez.		

Würden die Zinsen halbjährlich gutgeschrieben, so wäre der Endwert der Rente

$$M\ 1000 \times 4{,}204040 = M\ 4204.04.$$

Lehrsatz 1. Eine halbjährliche Rente wächst bei einem halbjährlichen Zinsfuß von 2% zu einem höheren Betrage an als bei einem ganzjährlichen von 4%.

Aufgabe 2. Zu welchem Betrage summiert sich eine zwanzigmalige halbjährliche Pränumerando-Rente im Betrag von M 2500.— bei 4%iger jährlicher Verzinsung?

Die nach o Jahren zahlbaren M 2500.— haben am Ende des 1. Jahres den Wert M 2500 × 1.04 = M 2600.—, und die nach $^1/_2$ Jahr zahlbaren M 2500.— haben am Ende des 1. Jahres den Wert M 2500 × 1.02 = M 2550.—, so daß die halbjährliche Rente in eine ganzjährliche Postnumerando-Rente von

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} \text{M } 2600.— \\ + \text{ „ } 2550.— \\ \hline \text{M } 5150.— \end{array}$$

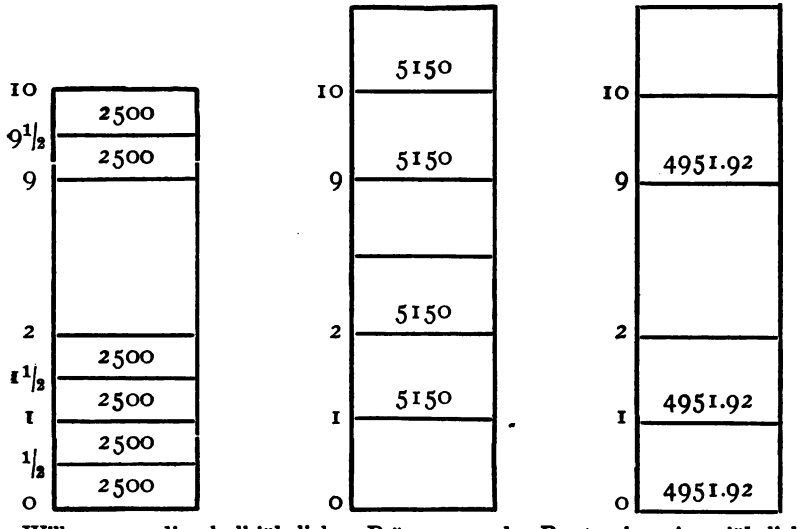
verwandelt werden kann. Der Endwert einer solchen Rente im Betrage von M 1.— ist (siehe S. 12)

$$\text{M } 1.— + \text{M } 11.006107 = \text{M } 12.006107,$$

mithin der einer Rente von M 5150.—

$$\text{M } 5150 \times 12006107 = \text{M } 61831.45.$$

$$\begin{array}{r} 12006107 \times 515 \\ 60030535 \\ 6008054 \\ \hline 618314511 \end{array}$$



Will man die halbjährliche Pränumerando-Rente in eine jährliche Pränumerando-Rente verwandeln, so bedenke man, daß der Wert der ersten beiden Zahlungen am Ende des 1. Jahres M 5150.—, mithin ihr Barwert zu Anfang des 1. Jahres

$$\text{M } 5150 \times 0.961538 = \text{M } 4951.92 \quad \text{ist.}$$

$$\begin{array}{r} 961538 \\ 515 \\ \hline 4807690 \\ 96154 \\ 48077 \\ \hline 4951921. \end{array}$$

Digitized by Google

Der Endwert der Pränumerando-Rente von M 4951.92 ist aber

M $4951.92^{1} \times 12.486351$ = M 61831.43 (wie oben).

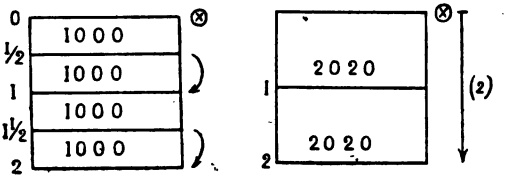
4951921
15368421
4951921
990384
198077
39615
2971
149
25
1
6183143

Lehrsatz 2. Eine halbjährliche Pränumerando-Rente zinst man mit 4% ganzjährlichen Zinsen auf, indem man sie zunächst in eine ganzjährliche Postnumerando-Rente oder auch in eine ganzjährliche Pränumerando-Rente verwandelt und diese nach den früher gegebenen Regeln aufzinst.

Bei der Verwandlung in eine ganzjährliche Pränumerando-Rente muß man jedoch zuerst auf die Postnumerando-Rente schließen.

β) Die Abzinsung.

Aufgabe 1. Welches ist der Barwert einer viermaligen halbjährlichen Postnumerando-Rente von M 1000.— bei Berechnung von 4% jährlichen Zinsen?



Der Endwert der nach $^{1}/_{2}$ Jahre fälligen M 1000.— ist am Ende des Jahres

M 1000.—
+ 2% „ 20.—
M 1020.—.

Der Endwert der in einem Jahre fälligen Zahlungen ist daher am Ende des Jahres

M 1020.—
+ „ 1000.—
M 2020.—.

Würde der Rentenberechtigte die nach $^{1}/_{2}$ Jahre fälligen M 1000.— nicht abheben, so würde er am Ende des Jahres den Betrag von M 2020.—

Digitized by Google

fordern können. Die viermalige halbjährliche Postnumerando-Rente von M 1000.— ist also gleichwertig mit einer zweimaligen jährlichen Postnumerando-Rente von M 2020.—. Der Barwert derselben ist aber nach der 4%igen Tabelle

$$M\ 2020 \times 1.886095 = M\ 3809.91.$$

$$\begin{array}{r} 1886095 \times 202 \\ \hline 3772190 \\ 37722 \\ \hline 3809912 \end{array}$$

Probe: Die Kontokorrent-Abrechnung (Staffel) der Bank am Ende des 2. Jahres würde lauten:

					Tage	#
1910	Dez.	31.	H.	M 3809.91	180	6858
1911	Juni	30.	S.	„ 1000.—		
			H.	M 2809.91	180	5058
	Dez.	31.	S.	„ 1000.—		11916
			H.	M 1809.91		
			H.	„ 132.40	4% Zinsen a/11916 #	
			H.	M 1942.31	Val. p. 31. Dez. 1911	
1912	Dez.	31.	H.	M 1942.31	180	3496
	Juni	30.	S.	„ 1000.—		
			H.	M 942.31	180	1696
	Dez.	31.	S.	„ 1000.—		
			S.	M 57.69		5192
			H.	„ 57.69	4% Zinsen a/5192 #	
				M 0		

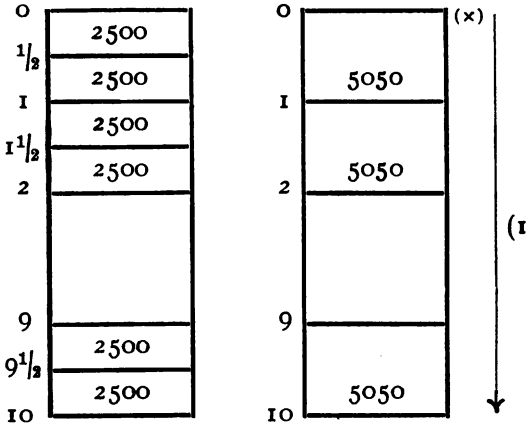
Lehrsatz. Eine halbjährliche Postnumerando-Rente zinst man mit 4% ganzjährlichen Zinsen ab, indem man sie zunächst in eine ganzjährliche Postnumerando-Rente verwandelt und diese nach den früher gegebenen Regeln abzinst.

Bei der Verwandlung der halbjährlichen Rente in eine jährliche war angenommen, daß der Rentenberechtigte die nach $^1/_2$ Jahre fälligen M 1000.— erst am Ende des Jahres abhebt, und daß ihm die Bank auf diese M 1000.— 4% / 180 Tage = 2% Zinsen vergütet. Es sind aber sehr wohl Fälle denkbar, in denen die nach $^1/_2$ Jahr fälligen M 1000.—

Digitized by Google

nicht mit 4 % angelegt werden können, wodurch sich zunächst der Wert der entsprechenden jährlichen Rente und damit auch der Barwert der halbjährlichen Rente ändert (vgl. die Anm. S. 38).

Aufgabe 2. Welchen Barwert hat eine 20malige halbjährliche Postnumerando-Rente im Betrage von M 2500.— bei 4%iger jährlicher Verzinsung?



Unter den obigen Voraussetzungen entspricht der halbjährlichen Rente von M 2500.— eine jährliche von M 5050.—. Ihr Barwert ist

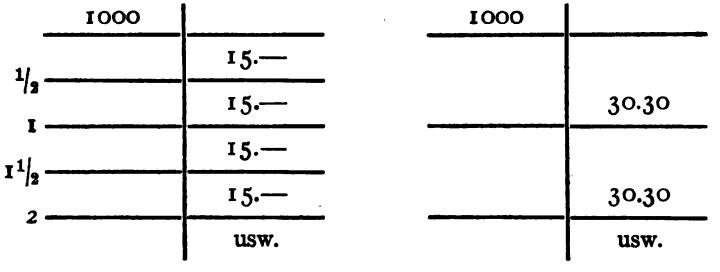
M 5050 × 8.110896
= M 40960.02.

8110896
4055448
4055448
409600248

Aufgabe 3. Welchen Preis zahlt jemand für ein 3%iges Rentenpapier mit halbjährlichem Zinstermin, wenn er mit seinem Gelde anderweitig jährlich 4% Zinsen verdienen kann und das Papier auf M 1000.— lautet?

Da der Käufer die nach $^1/_2$ Jahre fälligen M 15.— 4%ig anlegen kann, so haben sie für ihn am Ende des Jahres den Wert von

	M 15.—
+ 4% | 180 Tage	„ 0.30
	M 15.30.



Die halbjährliche Rente von M 15.— ist daher gleichwertig mit einer jährlichen Rente von

Digitized by Google

757.50	
	30.30 = 4%
	30.30 = 4%

M 15.30
+ „ 15.—
M 30.30.

Der Käufer verlangt aber aus M 1000.— eine jährliche Rente von M 40.—; er wird daher für das Papier nur

$$\frac{\text{M } 1000 \times 30.30}{40} = \text{M } 757.50$$

bieten.

Würde er eine Rentabilität von halbjährlich 2% verlangen, so würde er für das Papier nur M 750.—, also 1% weniger bieten (vgl. S. 46).

Digitized by Google

5. Antizipative Verzinsung.

Bisher war bei allen Rechnungen angenommen worden, daß die zu zahlenden Zinsen am Ende eines jeden Jahres (resp. Halbjahres, Vierteljahres) fällig wären. Es kommt jedoch zuweilen vor, daß der Schuldner sich verpflichtet, die Zinsen schon zu Anfang des Jahres zu entrichten. Im kaufmännischen Diskontverkehr ist dies ja das übliche Verfahren. Diskontiert z. B. jemand bei einer Bank einen Wechsel über M 1000.—, der nach 3 Monaten fällig ist, zu einem Zinsfuß von 4%, so erhält er von vornherein nur

	M 1000.—
÷ Zinsen 4% / 90 Tage	„ 10.—
	M 990.—.

Es würde durchaus nicht der Praxis entsprechen, wenn die Bank zunächst für den Wechsel die vollen M 1000.— zahlen und erst nach 3 Monaten den Zinsbetrag von M 10.— verlangen würde.

Dieses Verfahren, bei dem die Zinsen im voraus berechnet werden, nennt man antizipative Verzinsung, während man das in den obigen Aufgaben zur Anwendung gebrachte Verfahren als dekursive Verzinsung bezeichnet.

Während man es im Wechselverkehr ausschließlich mit der antizipativen Verzinsung zu tun hat, findet man in den Fällen, in denen Zinsen von Zinsen zu rechnen sind, fast ausschließlich dekursive Verzinsung. Wenn trotzdem im folgenden die antizipative Zinseszinsrechnung besprochen wird, so geschieht es einmal der Vollständigkeit halber, vor allem aber deswegen, weil die antizipative Zinseszins-Tabelle sehr bequem zur Berechnung von Abschreibungsquoten usw. verwandt werden kann.

a) Die Aufzinsungs-Tabelle.

Aufgabe 1. Zu welchem Betrage wächst ein Kapital von M 10000.— bei einem Zinsfuß von 4% in 1 Jahre an, wenn es zuzüglich verdienter Zinsen fortgesetzt zum Ankauf von 3 Monatswechseln benutzt wird?

Digitized by Google

Der Inhaber der M 10000.— kauft am 1. Januar einen 3 Monatswechsel, dessen Betrag natürlich größer sein muß als M 10000.—, da er in einem Wechsel von M 10000.— nur

		M 10000.—
÷ Zinsen	4% / 90 Tage	„ 100.—
		M 9900.—

anlegen kann. Um den Nennwert des erlangten Wechsels zu berechnen, folgert man:

M 99.— kann man anlegen in einem Wechsel von M 100.—

„ 1.— „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{100.—}{99.—}$

= M 1.010101

„ 10000.— „ „ „ „ „ „ „ = „ 10101.01.

Die Diskontrechnung würde lauten auf

	M 10101.01	per 1. April a/L.
÷	„ 101.01	4% / 90 Tage
	M 10000.—	Val. per 1. Januar.

Am 1. April zieht der Gläubiger den Wechsel von M 10101.01 ein und kauft für den Betrag einen neuen 3 Monatswechsel.

Da er für je M 1.— einen Wechsel auf M 1.010101 erhalten kann, so kauft er für M 10101.01 einen solchen auf

M 10101.01 × 1.010101 = M 10203.04.

1010101
1010101
1010101
10101
101
1
1020304

Die Diskontrechnung lautet auf

	M 10203.04	per 1. Juli a/L.
÷	„ 102.03	4% 90/Tage.
	M 10101.01	Val. p. 1. April.

Am 1. Juli zieht der Gläubiger den Wechsel ein und kauft einen neuen im Betrage von

Digitized by Google

M 10203.04 × 1.010101 = M 10306.10.

```
10203 04
10101 01
---------
10203 04
  102 03
    1 02
       1
---------
10306.10
```

Die Diskontrechnung lautet auf

M 10306.10 per 1. Oktober a/L.
÷ „ 103.06 4 % / 90 Tage
M 10203.04 Val. p. 1. Juli.

Am 1. Oktober kauft der Gläubiger für den eingezogenen Betrag einen neuen Wechsel auf

M 10306.10 × 1.010101 = M 10410.20.

```
10306.10
10101 01
---------
10306 10
  103 06
    1 03
       1
---------
10410 20
```

Die Diskontrechnung lautet auf

M 10410.20 per 1. Januar a/L.
÷ „ 104.10 4 % / 90 Tage
M 10306.10 Val. p. 1. Oktober.

Am 1. Januar zieht der Gläubiger diesen Wechsel ein und verfügt nun über M 10410.20. Die ursprünglichen M 10000.— sind also durch vierteljährliche 1 %ige antizipative Verzinsung zu M 10410.20 angewachsen.

Allgemein liegt der Berechnung folgender Gedanke zugrunde:

M $\frac{99.—}{100.—}$ wachsen an zu M 1.—

„ 1.— wächst „ „ „ 1.— × $\frac{100}{99}$ = M 1.010101

„ 1.010101 „ „ „ „ 1.010101 × 1.010101
= M $(1.010101)^2$ = M 1.020304

„ 1.020304 „ „ „ „ (1.020304) × 1.010101
= M $(1.010101)^3$ = M 1.030610

usw. (vgl. S. 2).

Digitized by Google

Daraus ergibt sich für die 1 %ige antizipative Aufzinsung folgende Tabelle:

Termin	Endbetrag
1	$(1.010101)^1 = 1.010101$
2	$(1.010101)^2 = 1.020304$
3	$(1.010101)^3 = 1.030610$
4	$(1.010101)^4 = 1.041020$
5	$(1.010101)^5 = 1.051536$

usw.,

während die Tabelle für die 1 %ige dekursive Tabelle folgendes Bild zeigt:

Termin	Endbetrag
1	$(1.01)^1 = 1.01$
2	$(1.01)^2 = 1.0201$
3	$(1.01)^3 = 1.030301$
4	$(1.01)^4 = 1.040604$
5	$(1.01)^5 = 1.051010$

usw.

Lehrsatz 1. Eine antizipative 1 %ige Verzinsung kann aufgefaßt werden als eine 1.010101 %ige dekursive.

Lehrsatz 2. Ein Zinsfuß von antizipativ 1 % ist höher als ein solcher von dekursiv 1 %.

Lehrsatz 3. Einem Zinsfuß von antizipativ 1 % entsprechen die Aufzinsungsfaktoren:

$$\left(\frac{100}{99}\right)^1 = (1.010101)^1 = 1.010101$$

$$\left(\frac{100}{99}\right)^2 = (1.010101)^2 = 1.020304$$

$$\left(\frac{100}{99}\right)^3 = (1.010101)^3 = 1.030610$$

usw.

Aufgabe 2. Zu welchem Betrage wächst M 1.— in 4 Jahren bei 4 %iger antizipativer Verzinsung an?

Der Barwert von M 1.—, die nach einem Jahre fällig ist, ist heute

M 1.—
÷ „ 0.04
M 0.96,

Digitized by Google

d. h. M 0.96 wachsen in 1 Jahre an zu M 1.—, mithin wächst

„ 1.— „ 1 „ „ „ „ 1 $\times \frac{100}{96}$ = M 1.041667.

96) 100 = 104166 . . .
400
160
640
640
64

Lehrsatz 4. Einem Zinsfuß von antizipativ 4% entsprechen die Aufzinsungsfaktoren

$$1 \quad \left(\frac{100}{96}\right)^1 = (1.041667)^1 = 1.041667$$

$$2 \quad \left(\frac{100}{96}\right)^2 = (1.041667)^2 = 1.085069$$

$$3 \quad \left(\frac{100}{96}\right)^3 = (1.041667)^3 = 1.130281$$

$$4 \quad \left(\frac{100}{96}\right)^4 = (1.041667)^4 = 1.177376$$

(vgl. Tabelle V).

104166667	108506946	113028068
76666401	76666401	76666401
104166667	108506946	113028068
4166667	4340278	4521123
104167	108507	113028
62500	65104	67817
6250	6510	6781
625	651	678
63	65	68
7	7	7
108506946	113028068	117737570

M 1.— wächst also in 4 Jahren an zu M 1.177376.

b) Die Abzinsungs-Tabelle.

Aufgabe 1. Welchen Barwert hat eine nach 4 Jahren fällige Forderung von M 1.— bei Berechnung von 4% antizipativen Zinsen?

Eine Forderung von M 1.—, die nach 1 Jahr fällig ist, hat heute den Wert von M 0.96.

Digitized by Google

Eine Forderung von M 0.96, die nach 1 Jahr fällig ist, hat heute den Wert von

$$0.96 \times 0.96 = (0.96)^2 = 0.9216.$$

$$\begin{array}{r} 96 \times 96 \\ \div\ 384 \\ \hline 9216 \end{array}$$

M 0.9216 ist daher der Barwert einer Forderung von M 1.— fällig nach 2 Jahren.

Als Barwert einer Forderung von M 1.—, die nach 3 Jahren fällig ist, ergibt sich entsprechend

$$0.9216 \times 0.96 = (0.96)^3 = 0.884736,$$

$$\begin{array}{r} 9216 \times 96 \\ \div\ 36864 \\ \hline 884736 \end{array}$$

und endlich ergibt sich als Barwert einer Forderung von M 1.—, die nach 4 Jahren fällig ist, der Betrag

$$0.884736 \times 0.96 = (0.96)^4 = 0.849347.$$

$$\begin{array}{r} 884736 \times 99 \\ \div\ 3538944 \\ \hline 84934656 \end{array}$$

Lehrsatz 1. Einem Zinsfuß von antizipativ 4% entsprechen die Abzinsungsfaktoren

1	$(0.96)^1 = 0.96$
2	$(0.96)^2 = 0.9216$
3	$(0.96)^3 = 0.884736$
4	$(0.96)^4 = 0.849347$

(vgl. Tabelle V).

Zu dieser Tabelle hätte man auch durch folgende Betrachtung gelangen können.

Der Wert der nach 4 Jahren fälligen Forderung ist am Ende des 4. Jahres M 1.— und mithin
am Anfang des 4. Jahres

$$\begin{array}{rr} & \text{M } 1.— \\ \div\ 4\% & \text{„ } 0.04 \\ \hline & \text{M } 0.96, \end{array}$$

daher am Anfang des 3. Jahres

Digitized by Google

M 0.96
÷ 4 % „ 384
M 0.9216,

am Anfang des 2. Jahres

M 0.9216
÷ 4 % „ 36864
M 0.884736

und am Anfang des 1. Jahres

M 0.884736
÷ 4 % „ 3538944
M 0.84934656 (wie oben).

Die Berechnung der Abzinsungsfaktoren erfolgt also entweder durch fortgesetzte Multiplikation mit 0.96 oder durch fortgesetzte Subtraktion von 4 %, was rechnerisch dasselbe ist.

Aufgabe 2. Mit welchem Betrag wird ein Gebäude im Werte von M 100000.— nach 10 Jahren noch zu Buche stehen, wenn von demselben jährlich 4 % des Restwertes abgeschrieben werden?

Der Buchwert ist

heute		M 100000.—	
	÷ 4 %	„ 4000.—	
nach 1 Jahr		M 96000.—	
	÷ 4 %	„ 3840.—	
nach 2 Jahren		M 92160.—	usw.

Es zeigt sich, daß die Endwerte genau mit den 100000fachen Beträgen der 4 %igen antizipativen Abzinsungsfaktoren übereinstimmen. Der Buchwert wird daher am Ende des 10 Jahres

M 66483.30 sein.

Lehrsatz 2. Abschreibungs-Tabellen und antizipative Zinseszins-Tabellen sind identisch.

Aufgabe 3. Mit welchem Prozentsatz vom Restwert muß ein Gebäude abgeschrieben werden, damit es nach 17 Jahren nur noch etwa zum halben Neuwert zu Buche steht?

Aus der antizipativen Abzinsungstabelle ersieht man ohne weiteres, daß das Gebäude mit 4 % vom Restwert abgeschrieben werden muß: es steht dann nach 17 Jahren noch mit 0.499587 seines Neuwertes zu Buche.

Eine weitere Anwendung der antizipativen Abzinsungsfaktoren werden wir im 9. Abschnitt zeigen.

Digitized by Google

6. Tilgbare Anleihen.

Bei der Aufnahme eines Darlehns (einer Anleihe) kann sich der Schuldner verpflichten, das erhaltene Kapital in bestimmten Raten (Tilgungsquoten) und zu bestimmten Zeitpunkten zurückzuzahlen. Sowohl die Höhe der Raten wie ihre Fälligkeiten können ganz beliebig fixiert werden, und in der Tat herrscht hier in der Praxis eine außerordentliche Mannigfaltigkeit. In sehr vielen Fällen wird aber der Tilgung eine gewisse Gesetzmäßigkeit zugrunde gelegt, und diese Fälle sind es, die uns in den folgenden Abschnitten beschäftigen werden. Vor allem kann in bezug auf die Fälligkeit festgelegt werden, daß z. B. am Ende jedes Jahres (Halbjahres usw.) ein Teil des Kapitals getilgt werden soll. Der Schuldner hat dann am Ende des Jahres einmal die Zinsen auf das noch schuldige Kapital und ferner die Tilgungsquote zu entrichten. Seine Gesamtleistung wird Annuität genannt. (Wenn auch das Wort „Annuität" zunächst nur „Jahresleistung" bedeutet, so wollen wir es doch auch in gewissen Fällen für Halbjahrsleistungen usw. anwenden.) Die Gesetzmäßigkeit kann sich außerdem entweder auf die Höhe der Tilgungsquote (gleichbleibende, fallende, steigende) beziehen oder auf die Höhe der Annuität. Von den vielen denkbaren oder in der Praxis vorkommenden Fällen sollen aber nur einige hier behandelt und an ihnen die wichtigsten Rechnungen, die sich auf dieses Gebiet beziehen, dargestellt werden.

a) Tilgung einer Anleihe bei gleichmäßiger Annuität.

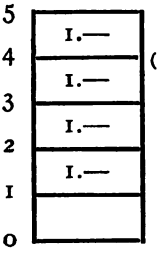
Aufgabe 1. Jemand hat eine Anleihe von M 10000.— aufgenommen, die er jährlich mit 4% verzinsen und nach 4 Jahren in einer Summe zurückzahlen muß. Er will jedoch durch vier gleich große, am Ende jedes Jahres zu leistende Zahlungen einen Tilgungsfonds bei einer Bank ansammeln, die ihm 4% jährliche Zinsen vergütet. Welchen Betrag muß er jährlich bei der Bank einzahlen, und welches ist die gesamte jährliche Belastung, die ihm aus der Anleihe erwächst?

Zahlt der Schuldner bei der Bank jährlich M 1.— ein, so verfügt er am Ende des 4. Jahres über

$$\text{M } 1.— + \text{M } 3.246464 = \text{M } 4.246464.$$

Digitized by Google

Er will aber am Ende des 4. Jahres über M 10000.— verfügen; er muß deshalb am Ende jedes Jahres M 2354.90 bei der Bank einzahlen, denn



M 4.246464 erhält er aus jährlich M 1.—;

„ 1.— „ „ „ „ „ $\frac{1}{4.246464}$;

„ 10000.— „ „ „ „ „ $\frac{10000}{4.246464}$

= M 2354.90.

4246464) 1000000 = 235490
150707
23313
2081
382
0.

Zahlt der Schuldner am Ende jedes Jahres bei der Bank M 2354.90 ein, so sammelt er in 4 Jahren M 10000.— an, mit denen er seine Anleihe tilgen kann.

Außerdem hat der Schuldner am Ende jedes Jahres dem Gläubiger

4% Zinsen a/ M 10000.— = M 400.—

zu entrichten, so daß seine gesamte Jahresleistung (Annuität)

M 2354.90
+ „ 400.—
M 2754.90

beträgt.

Aufgabe 2. Wie würde sich das Konto des Schuldners am Ende jedes Jahres stellen, wenn er den Tilgungsfonds bei derselben Bank ansammelt, die ihm das Darlehn gewährt hat? (Konto S. 63.)

In tabellarischer Übersicht ergibt sich:

Tilgungsplan.

	Kapital	Zinsen	Tilg.-Quote	Annuität	Kap.-Rest
1	10000.—	400.—	2354.90	2754.90	7645.10
2	7645.10	305.80	2449.10	2754.90	5196.—
3	5196.00	207.84	2547.06	2754.90	2648.94
4	2648.94	105.96	2648.94	2754.90	0

Digitized by Google

Soll					Haben					
			Zinsen	Kapital				Annuität	Zinsen	Kapital
1910					1910					
Jan.	1.			10000.—	Dez.	31.	Zahlung	2754.90	400.—	2354.90
Dez.	31.	Zinsen 4%	400.—		Dez.	31.	Kapital-Saldo			7645.01
			400.—	10000.—					400.—	10000.—
1911					1911					
Jan.	1.	Kapital-Saldo		7645.10	Dez.	31.	Zahlung	2754.90	305.80	2449.10
Dez.	31.	Zinsen 4%	305.80				Kapital-Saldo			5196.—
			305.80	7645.10					305.80	7645.10
1912					1912					
Jan.	1.	Kapital-Saldo		5196.00	Dez.	31.	Zahlung	2754.90	207.84	2547.06
Dez.	31.	Zinsen 4%	207.84		Dez.	31.	Kapital-Saldo			2648.94
			207.84	5196.00					207.84	5196.00
1913					1913					
Jan.	1.	Kapital-Saldo		2648.94	Dez.	31.	Zahlung	2754.90	105.96	2648.94
Dez.	31.	Zinsen 4%	105.96							
			105.96	2648.94					105.96	2648.94

Digitized by Google

Daraus folgt, daß eine Annuität von M 2754.90 gerade ausreicht, um eine Schuld von M 10000.— mit 4% zu verzinsen und in 4 Jahren zu tilgen.

0	(10000.—)	
1		400.—
2		400.—
3		400.—
4		400.—

0	(10000.—)	
1		2754.90
2		2754.90
3		2754.90
4		2754.90

Der Schuldner hatte die Verpflichtung übernommen, am Ende des 4. Jahres die geliehenen M 10000.— und am Ende jedes Jahres M 400.— Zinsen zu zahlen. Der heutige Wert dieser Verpflichtung ist M 10000.— (vgl. S. 29).

Statt dessen kann der Schuldner aber auch 4 Jahre lang M 2754.90 zahlen.

Der Barwert dieser Zahlungen muß natürlich ebenfalls M 10000.— sein. Er berechnet sich zu

$$\text{M } 2754.90 \times 3.629895 = \text{M } 10000.—$$

$$\begin{array}{r} 3629895 \\ 94572 \\ \hline 7259790 \\ 2540927 \\ 181495 \\ 14519 \\ 3266 \\ \hline 9999997 \end{array}$$

Lehrsatz 1. Eine 4malige Postnumerando-Rente von M 2754.90 entspricht einem Kapital von M 10000.— einschließlich 4% jährliche Zinsen für die Zwischenzeit.

In anderer Fassung lautet dieser Satz:

Eine Annuität von M 2754.90 reicht aus, um ein Kapital von M 10000.— mit 4% zu verzinsen und in 4 Jahren zu tilgen.

Die gleichbleibende Annuität berechnet sich also als Wert einer Rente, deren Barwert gleich dem geliehenen Kapital ist. Ist die Annuität bekannt, so läßt sich der Tilgungsplan dadurch berechnen, daß man von Jahr zu Jahr zunächst die Zinsen, dann die Tilgungsquote und endlich den Kapital-

Digitized by Google

rest berechnet. Ist die Annuität richtig bestimmt, so muß die letzte Tilgungsquote (M 2648.94) gerade gleich dem letzten Kapitalrest sein.

Diese Berechnung ist ziemlich umständlich, besonders, wenn es sich um Tilgungspläne handelt, die sich über einen sehr langen Zeitraum erstrecken. Es wird deshalb nötig sein, die Gesetzmäßigkeiten eines solchen Tilgungsplanes näher zu untersuchen, um einerseits zu einer einfacheren Berechnung zu gelangen und andererseits Möglichkeiten zu zeigen, wie man gewisse Fragen ganz ohne Aufstellung des Tilgungsplanes beantworten kann.

Annuität = 2754.90

Kapital	Zinsen	Tilg.-Quote
10000.—	400.—	2354.90
7645.10	305.80	2449.10
5196.—	207.84	2547.06
2648.94	105.96	2648.96

Die Annuität setzt sich aus Zinsen und Tilgungsquote zusammen, und da die Annuität eine gleichmäßige ist, so ist die Summe aus Zinsen und Tilgungsquote in jedem Jahr die gleiche (M 2754.90).

Da das Kapital von Jahr zu Jahr kleiner wird, so nehmen die Zinsen von Jahr zu Jahr ab. Im ersten Jahre betragen die Zinsen

$$4\,\% \text{ a/ M } 10000.— = 4\,\% \text{ a/ (M } 7645.10 + \text{M } 2354.90),$$

während sie im 2. Jahre nur

$$4\,\% \text{ a/ M } 7645.10$$

betragen. Die Zinsen vermindern sich also um

$$4\,\% \text{ a/ M } 2354.90 = 4\,\% \text{ der Tilgungsquote des Vorjahrs.}$$

Lehrsatz 2. Die Zinsen vermindern sich jährlich um die Zinsen der vorjährigen Tilgungsquote.

Um denselben Betrag muß sich die Tilgungsquote vermehren, da die Summe aus Zinsen und Tilgungsquote immer gleich bleibt.

Tilgungsquote des 1. Jahres	=	M 2354.90
+ 4 %	„	94.20
Tilgungsquote des 2. Jahres	=	M 2449.10
+ 4 %	„	97.96
Tilgungsquote des 3. Jahres	=	M 2547.06
+ 4 %	„	101.88
Tilgungsquote des 4. Jahres	=	M 2648.94.

Digitized by Google

Lehrsatz 3. Die Tilgungsquote vermehrt sich jährlich um die Zinsen der vorjährigen Tilgungsquote; d. h. man kann die 4. Tilgungsquote aus der ersten dadurch berechnen, daß man diese dreimal aufzinst, und umgekehrt kann man die 1. Tilgungsquote aus der 4. berechnen dadurch, daß man diese dreimal abzinst.

Mit Hilfe der Aufzinsungs- resp. Abzinsungsfaktoren ergibt sich

M 2354.90 × 1.124864 = M 2648.94

und „ 2648.94 × 0.888996 = „ 2354.90.

235490	264894
4684211	699888
235490	2119152
23549	211915
4710	21192
942	2383
188	238
14	16
1	2354896
264894	

Im letzten Jahre ist die Tilgungsquote gleich dem Kapitalrest, die Zinsen der Tilgungsquote also gleich den Kapitalzinsen (M 105.96). Daher ist die

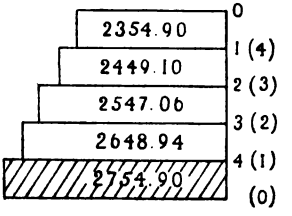
letzte Tilgungsquote	M 2648.94
zuzüglich $4\frac{0}{0}$	„ 105.96
	M 2754.90.

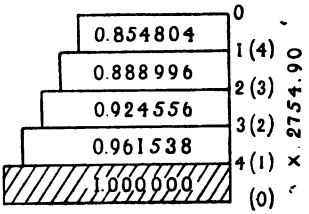
Lehrsatz 4. Zinst man die letzte Tilgungsquote 1 Jahr auf, so erhält man die Annuität.

Oder: Die letzte Tilgungsquote ist gleich der um 1 Jahr abgezinsten Annuität.

Aus Lehrsatz 2 und 4 folgt ohne weiteres:

Lehrsatz 5. Zinst man die Annuität viermal ab, so erhält man die 1. (4. letzte) Tilgungsquote, zinst man sie dreimal ab, so erhält man die 2. (3. letzte) usw.





Digitized by Google

z. B.: M 2754.90 × 0.888996 = M 2449.10.

275490
699888
2203920
220392
22039
2479
248
16
2449094

Man kann also alle Tilgungsquoten unabhängig von den früheren und vom Kapitalrest berechnen, sodass ein Rechenfehler sich nicht auf die folgenden Ziffern überträgt. Man wird deshalb einen Tilgungsplan nicht in der auf S. 62 angegebenen Weise aufstellen, sondern man wird zunächst die Tilgungsquoten hinschreiben, dann die Zinsen als Differenz von Annuität und Tilgungsquote berechnen und endlich die Kapitalreste feststellen. (Vgl. unten.)

Für die Richtigkeit des so aufgestellten Tilgungsplanes ergeben sich folgende Proben, die keines weiteren Beweises bedürfen.

Lehrsatz a). Die Summe der Tilgungsquoten ist gleich dem ursprünglichen Kapital.

Lehrsatz b). Die Summe der Zinsen ist gleich 4% der Summe der Kapitalreste:

$$4\%\ \text{a/ M } 25490.04 = \text{M } 1019.60.$$

Lehrsatz c). Die Summe der Zinsen und die Summe der Tilgungsquoten ist gleich der Annuität multipliziert mit der Anzahl der Jahre, über die sich die Tilgung erstreckt.

$$\text{M } 1019.60 + \text{M } 10000.— = 4 \times \text{M } 2754.90$$
$$\text{„ } 11019.60 = \text{M } 11019.60.$$

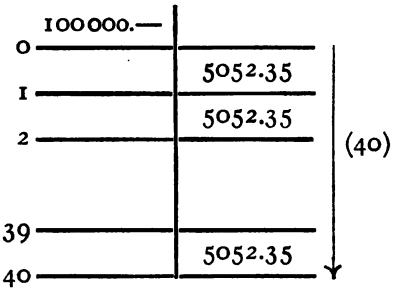
Aufgabe 3. Eine Hypothek von M 100000.— soll jährlich mit 4% verzinst und in 40 Jahren getilgt werden. Wie groß ist die Annuität, und wie groß ist die 20. Tilgungsquote?

Der Barwert der 40 gleichen Annuitäten muß M 100000.— betragen.

Eine 40jährige Postnumerando-Rente von M 1.— hat den Barwert von

$$\text{M } 19.792774;$$

Digitized by Google



mithin entspricht dem Barwert von M 100000.— eine Rente von

$$\frac{\text{M } 100000}{19.792774} = \text{M } 5052.35.$$

197927 | 1000000 = 505235
10361
465
69
10

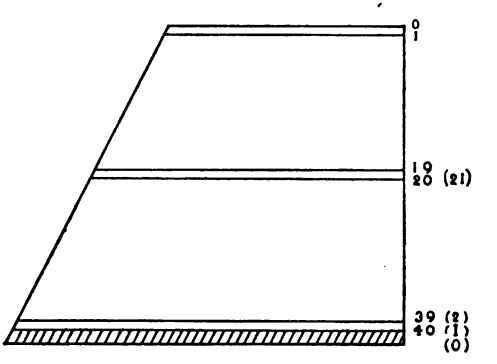
Probe nach Lehrsatz 5:

M 5052.35 × 0.208289 = M 1052.35
+ 4% a| M 100000 = „ 4000.—
Annuität = M 5052.35.

505235
982802
1010470
40419
1011
404
45
1052349

Die Annuität ist also richtig bestimmt.

Die 20. Tilgungsquote ist zahlbar am Ende des 20. Jahres. Die am Ende des 40. Jahres zahlbare ist die (1.) letzte, die am Ende des 39. Jahres zahlbare die (2.) letzte, mithin die am Ende des 20. Jahres zahlbare die (21.) letzte. Sie wird daher aus der Annuität durch Multiplikation mit dem 21. Abzinsungsfaktor gefunden (Lehrsatz 5 S. 66). Ihr Wert ist



M 5052.35 × 0.438834 = M 2217.14.

Digitized by Google

505235
438834
2020940
151571
40419
4042
152
20
2217144

Aufgabe 4. Wie groß ist der Kapitalrest zu Anfang des 20. Jahres?

Bei der zuerst behandelten Aufgabe war der Kapitalrest zu Anfang des 3. Jahres, d. h. der 2. letzte, gleich M 5196.—. Die Tilgungsquote des Jahres war M 2547.06; mithin konnte man die Zinsen berechnen als

Annuität	M 2754.90
÷ Tilgungsquote	„ 2547.06
Zinsen	M 207.84.

Da die Zinsen gleich 4% vom Kapitalrest sein müssen, so hätte man den Kapitalrest aus jenen berechnen können nach der Formel

$$\text{Kapitalrest} = \frac{100 \times \text{M } 207.84}{4} = \text{M } 5196.—.$$

Lehrsatz 6. Der Kapitalrest eines Jahres ist gleich den Zinsen des betreffenden Jahres multipliziert mit $\frac{100}{4}$.

Im vorliegenden Falle ist die Tilgungsquote M 1217.14; mithin betragen die Zinsen:

Annuität	M 5052.35
÷ Tilgungsquote	„ 2217.14
Zinsen	M 2835.21,

und der Kapitalrest zu Anfang des 20. Jahres ist

$$\frac{\text{M } 2835.21 \times 100}{4} = \text{M } 70880.25.$$

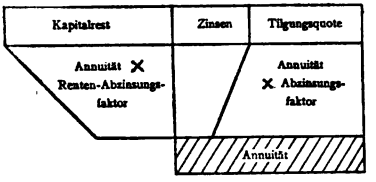
Zu demselben Resultat kann man durch folgende Überlegung gelangen: Zu Anfang des 20. Jahres, d. h. nach 19 Jahren, stehen noch 21 Annuitäten von M 5052.35 aus. Das Restkapital muß daher gleich dem Barwert dieser 21 Annuitäten sein.

$$\text{M } 5052.35 \times 14.029160 = \text{M } 70880.23 \text{ (wie oben).}$$

Digitized by Google

	(70880.23)		
19			14029160
	5052.35		532505
20			70145800
	5052.35		701458
21			28058
		(21)	4209
			701
39			70880226
	5052.35		
40			

Lehrsatz 7. Das Restkapital ist gleich dem Barwert der noch ausstehenden Annuitäten, d. h. das Restkapital zu Anfang des 20. Jahres ist gleich der Annuität multipliziert mit dem 21. Renten-Abzinsungsfaktor.



Hat man also die Annuität bestimmt, so berechnet man die Tilgungsquoten durch Multiplikation mit den Abzinsungsfaktoren (Lehrsatz 5) und die Kapitalreste durch Multiplikation mit den Renten-Abzinsungsfaktoren.

Aufgabe 5. Wie groß ist im Falle der ersten Aufgabe der zur Tilgung und Verzinsung der Anleihe nötige Gesamtaufwand? Welcher Betrag entfällt hiervon auf die Zinsen und welcher auf die Tilgung?

Der Gesamtaufwand ist $4 \times$ M 2754.90 = M 11019.60;
davon entfallen auf die Tilgung „ 10000.—
und auf die Zinsen „ 1019.60.

Aufgabe 6. Wie stellen sich diese Ziffern bei der letzten Aufgabe?

Der Gesamtaufwand ist $40 \times$ M 5052.35 = M 202094.—;
davon entfallen auf die Tilgung „ 100000.—
und auf die Zinsen „ 102094.—.

Hätte die Hypothek nur M 10000.— betragen, so wäre
der auf die Zinsen entfallende Betrag M 10209.40.

Man erhält also, auf eine Anleihe von M 10000.— und 4 %ige Verzinsung bezogen,
bei 4jähriger Tilgungszeit eine Zinslast von M 1019.60,
„ 40 „ „ „ „ „ „ 10209.40.

Lehrsatz 8. Der für die Verzinsung nötige Aufwand wächst ungefähr proportional der Tilgungsdauer.

Digitized by Google

b) Tilgung einer Anleihe nach einem festen Prozentsatz des Anfangskapitals.

Aufgabe 1. Eine Anleihe von M 10000.— soll mit jährlich 4% verzinst und 20% getilgt werden.

1. Wie groß ist die Annuität?
2. In welcher Zeit wird die Anleihe getilgt?
3. Wie groß ist die Annuität des letzten Jahres?
4. Wie groß ist der Kapitalrest zu Anfang des letzten Jahres?

1. Wie groß ist die Annuität?

Die Annuität setzt sich zusammen aus Zinsen und Tilgungsquote. Für das Ende des 1. Jahres ergibt sich:

Zinsen	M 400.—
Tilgungsquote 20% auf M 10000.—	„ 2000.—
Annuität	M 2400.—
Kapitalrest	„ 8000.—.

Unter einer Tilgung nach einem festen Prozentsatz des Anfangskapitals ist nun im vorliegenden Falle eine Tilgung bei einer gleichbleibenden Annuität von M 2400.— zu verstehen, während man nach dem Wortlaut meinen sollte, daß im nächsten Jahre nur 4% auf M 7600.— = M 304.— und die Tilgungsquote von M 2000.— zu entrichten wären. Es handelt sich also ebenso wie im vorigen Abschnitt um die Tilgung einer Anleihe bei gleichmäßiger Annuität. Der Unterschied zwischen den beiden Tilgungsarten wird sub 2. zu erörtern sein.

2. In welcher Zeit wird die Anleihe getilgt?

Wir gehen wieder davon aus, daß der Schuldner heute M 10000.— erhält und dafür dem Gläubiger eine Rente in Höhe von M 2400.— verspricht. Diese Rente ist so oft zu zahlen, daß ihr Barwert gerade M 10000.— beträgt (vgl. Aufgabe S. 28).

10000.—	
	2400.—
	2400.—
	2400.—
	usw.

Man schließt wieder: Aus M 10000.— kann gerade so lange eine Rente von M 2400.— gezahlt werden, wie aus

$$\frac{\text{M } 10000}{2400} = \text{M } 4.166667$$

eine solche von M 1.—.

Digitized by Google

Nach der Renten-Tabelle kann aus

M 3.629895 4 Jahre lang

und aus „ 4.451822 5 „ „

eine Rente von M 1.— gezahlt werden. Daher ist M 4.166667 der Barwert einer viermaligen Rente von M 1.— und eines Restkapitals, mithin M 10000.— der Barwert einer viermaligen Rente von M 2400.— und eines Restkapitals, das am Ende des 5. Jahres zurückzuzahlen ist.

Die Anleihe wird also in 5 Jahren durch die Annuität von M 2400.— vollständig getilgt werden, wobei aber die letzte Zahlung kleiner als M 2400.— ist (vgl. S. 28).

3. Wie groß ist die Annuität des letzten Jahres?

	1288.25 / 8711.75	
0		2400.—
1		2400.—
2		2400.—
3		2400.—
4		1567.35
5		

Der Barwert der viermaligen Rente von M 2400.— ist

M 2400 × 3.629895 = M 8711.75.

3629895 × 24

7259790

1451958

8711748

Es sind also am Ende des 5. Jahres noch M 1288.25 einschließlich 4% Zinseszinsen zurückzuzahlen, d. h.

M 1288.25 × 1.216653 = M 1567.35.

128825

3566121

1288250

257650

12883

7729

773

64

4

1567353

M 10000.— ist also der Barwert einer viermaligen Postnumerando-Rente von M 2400.— und einer einmaligen, nach 5 Jahren zu leistenden Zahlung von M 1567.35.

Das Kapital von M 10000.— kann man sich dabei wieder zerlegt denken in ein Kapital von M 8711.75 und ein Zusatzkapital von M 1288.25.

4. Wie groß ist der Kapitalrest zu Anfang des letzten Jahres?

Digitized by Google

a) Der Wert des Zusatzkapitals ist am Ende des 5. Jahres M 1567.35, mithin zu Anfang des 5. Jahres

$$M\ 1567.35 \times 0.961538 = M\ 1507.07.$$

b) Der Wert des Zusatzkapitals ist heute M 1288.25, mithin zu Anfang des 5. Jahres oder nach 4 Jahren

$$M\ 1288.25 \times 1.169859 = M\ 1507.07.$$

156735	128825
835169	9589611
1410615	1288250
94041	128825
1567	77295
784	11594
47	1031
12	64
1507066	11
	1507070

Man erhält demnach folgenden

Tilgungsplan.

Kapital	Zinsen	Annuität	Tilgungsquote
10000.—	400.—	2400.—	2000.—
8000.—	320.—	2400.—	2080.—
5920.—	236.80	2400.—	2163.20
3756.80	150.27	2400.—	2249.73
1507.07	60 28	1567.35	1507.07
Sa. 29183.87	1167.35	11167.35	10000.—

Der Tilgungsplan unterscheidet sich von einem solchen der im Abschnitt a) besprochenen Art im wesentlichen nur in den Ziffern des letzten Jahres.

Dementsprechend gelten folgende Lehrsätze:

Lehrsatz 1. Eine viermalige Postnumerando-Rente von M 2400.— und eine einmalige nach 5 Jahren zu leistende Zahlung von M 1507.07 entsprechen einem nach 5 Jahren fälligen Kapital von M 10000.— einschließlich 4% jährlicher Zinsen für die Zwischenzeit.

Lehrsatz 2. Die Tilgungsquote vermehrt sich jährlich um die Zinsen der vorjährigen Tilgungsquote, d. h. man erhält die 4. Tilgungsquote aus der ersten durch dreimalige Aufzinsung.

Digitized by Google

Abweichend von den Lehrsätzen des Abschnitts a) ist dagegen folgender:

Lehrsatz 3. Vermehrt man die vorletzte Tilgungsquote um 4% und um die Zinsen des Kapitalrestes, so erhält man die Annuität.

Vorletzte Tilgungsquote	M 2249.73
+ 4% davon	„ 89.99
+ 4% a/ Kapitalrest von M 1507.07	„ 60.28
	M 2400.—.

Aufgabe 2. Wie groß ist der Kapitalrest zu Anfang des 3. Jahres?

1. Berechnung aus den Zinsen des 3. Jahres (vgl. S. 69).

Die erste Tilgungsquote ist M 2000.—, mithin die dritte Tilgungsquote nach Lehrsatz 3)

$$\text{M } 2000.— \times 1.0816 = \text{M } 2163.20.$$

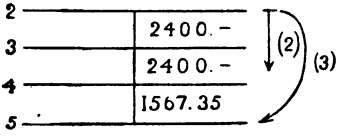
Die Zinsen berechnen sich als Differenz:

Annuität	M 2400.—
÷ Tilgungsquote	„ 2163.20
Zinsen	M 236.80.

Der Kapitalrest ist also

$$\frac{\text{M } 236.80 \times 100}{4} = \text{M } 5920.—.$$

2. Berechnung aus den noch ausstehenden Zahlungen (S. 70).



Es stehen noch aus eine zweimalige Postnumerando-Rente von M 2400.— mit dem Barwert

$$\text{M } 2400.— \times 1.886095 = \text{M } 4526.62^8$$

und eine einmalige Zahlung von M 1567.35 mit dem Barwert von

$$\text{M } 1567.35 \times 0.888996 = \text{M } 1393.36^7,$$

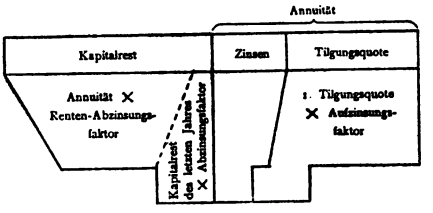
in Summa also

	M 4526.62⁸
+	„ 1393.36⁷
	M 5920.— (wie oben).

Lehrsatz 4. Der Kapitalrest zu Anfang des 3. Jahres ist gleich $^{100}/_{4}$ multipliziert mit den Zinsen des 3. Jahres oder auch gleich dem Barwert der noch ausstehenden Annuitäten.

Digitized by Google

Aufgabe 3. Ein Kapital von M 100000.— soll halbjährlich mit 2 % verzinst und $2\frac{1}{2}$ % getilgt werden.



1. In welcher Zeit wird das Kapital vollständig getilgt?

2. Wie groß ist der Schuldrest des letzten Jahres?

3. Wie groß ist der Schuldrest nach 10 Jahren?

1. Die gleichbleibende Annuität berechnet sich aus Tilgungsquote und Zinsen des 1. Halbjahres:

Tilgungsquote	M 2500.—
Zinsen	„ 2000.—
Annuität	M 4500.—.

Der Anleihenehmer schuldet also dem Gläubiger an Stelle der M 100000.— eine halbjährliche Postnumerando-Rente von M 4500.—.

Aus M 100000.— kann nun ebensolange eine Rente von M 4500.— gezahlt werden, wie aus

$$\frac{\text{M } 100000.—}{4500.—} = \text{M } 22.222222$$

eine solche von M 1.—.

Der Barwert einer 29maligen Rente ist M 21.844385,
„ „ „ 30 „ „ „ „ „ 22.396456.

Das Kapital von M 100000.— wird daher in 30 Jahren vollständig getilgt, wobei die Annuität des letzten Halbjahres kleiner als M 4500.— ist.

2. Der Barwert einer 29maligen halbjährlichen Postnumerando-Rente von M 4500.— ist

$$\text{M } 4500.— \times 21.844385 = \text{M } 98299.73.$$

$$\begin{array}{r} 21844385 \times 45 \\ \hline 87377540 \\ 109221925 \\ \hline 982997325 \end{array}$$

Das Zusatzkapital beträgt daher M 1700.27. Es läuft bis zum Anfang des 30. Halbjahres (Ende des 29. Halbjahres) an zu

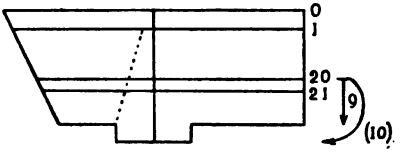
$$\text{M } 1700.27 \times 1.775845 = \text{M } 3019.42.$$

Digitized by Google

1775845
720071
1775845
1243092
355
124
3019416

An Ende des 30. Halbjahres sind daher noch zu zahlen

M 3019.41⁶
+ 2% „ 60.38⁸
M 3079.80.



3. Der Schuldrest zu Anfang des 10. Jahres (20. Halbjahres) berechnet sich

a) als Kapitalwert der Zinsen. Die 21. Tilgungsquote ist

M 2500.— × 1.485947 = M 3714.87.

Annuität	M 4500.—
÷ Tilgungsquote	„ 3714.86⁷⁵
Zinsen	M 785.13²⁵.

Der Kapitalrest ist daher

$$\frac{\text{M } 785.13^{25} \times 100}{2} = \text{M } 39256.63.$$

b) Als Barwert der noch ausstehenden Zahlungen.

M 4500.— × 8.162237 = M 36730.07
+ „ 3079.80 × 0.820348 = „ 2526.51
M 39256.58 (wie oben).

8162237 × 45	820348
32648948	89703
40811185	2461044
36730067	57424
	7383
	656
	2526507

Digitized by Google

c) Tilgung von Partial-Obligationen auf Grund einer gleichmäßigen Annuität.

Aufgabe 1. Eine Anleihe von M 10000.—, eingeteilt in 100 Obligationen à M 100.—, soll bei gleichmäßiger Annuität mit 4% verzinst und in 4 Jahren getilgt werden. Es ist der Tilgungsplan aufzustellen.

Für eine nicht in Stücke eingeteilte Anleihe ergab sich unter denselben Bedingungen (S. 62) der

Tilgungsplan:

Kapitalrest	Annuität	Zinsen	Tilgungsquote
10000.—	2754.90	400.—	2354.90
7645.10	2754.90	305.80	2449.10
5196.00	2754.90	207.84	2547.06
2648.94	2754.90	105.96	2648.94

Am Ende des ersten Jahres stehen für die Tilgung M 2354.90 zur Verfügung, so daß 23 Stücke à M 100.— ausgelost werden können. Der Rest von M 54.90 bleibt beim Kapitalrest und ist mit diesem zu verzinsen. Man wird aber die Tilgungsquote des nächsten Jahres um diesen Betrag erhöhen, so daß im 2. Jahre

M 2449.10
+ „ 54.90
M 2504.—

für die Tilgung zur Verfügung stehen. Es sind daraus 25 Stücke zu tilgen. Den Rest von M 4.— wird man wieder der nächsten Tilgungsquote zuschreiben usw.

In der Übersicht ergibt sich:

	Tilgungsquote	Stücke	Rest	Zinsen
1.	2354.90	23	54.90	2.20 + 305.80 = 308.—
2.	2449.10			
	+ 54.90			
	2504.—	25	4 —	0.16 + 207.84 = 208.—
3.	2547.06			
	+ 4.—			
	2551.06	25	51.06	2.04 + 105.96 = 108.—
4.	2648.94			
	+ 51.06			
	2700.—	27	—.—	

woraus man den Tilgungsplan leicht zusammensetzen kann.

Digitized by Google

Einfacher gestaltet sich jedoch die Berechnung des Tilgungsplans auf folgendem Wege:

Es war früher gezeigt worden, daß die Tilgungsquote jährlich um 4% zunimmt. Die Tilgungsquote des ersten Jahres ist M 2354.90 oder, in Stücken à M 100.— ausgedrückt, 23.55 Stücke. Davon können aber nur 23 Stücke ausgelost werden. Es bleibt ein Rest von 0.55 Stücken.

Die Tilgungsquote des nächsten Jahres ist

	23.55
+ 4%	0.94
	24.49
+ Rest	—.55
	25.04.

Bequemer ist es, die Restsumme getrennt zu führen und sie erst zur Tilgung heranzuziehen, wenn sie die Einheit überschreitet:

	Tilgungsquote	Stücke	Rest
1.	23.55	23	0.55
	+ 4% 94		+ 0.49
2.	24.49	25	1.04
	+ 4% 98		+ 0.47
3.	25.47	25	0.51
	+ 4% 1.02		+ 0.49
4.	26.49	27	0
		100	

Hat man die Anzahl der auszulosenden Stücke ermittelt, so kann man ohne weiteres den Tilgungsplan aufstellen:

Tilgungsplan.

Tilgungsquote Stücke	Tilgungsquote Betrag	Kapital-Rest	Zinsen 4%	Annuität
23	2300.—	10000.—	400.—	2700.—
25	2500.—	7700.—	308.—	2808.—
25	2500.—	5200.—	208.—	2708.—
27	2700.—	2700.—	108.—	2808.—

Digitized by Google

Aufgabe 2. Eine Anleihe von M 100000.—, eingeteilt in 200 Stücke à M 500.—, soll bei gleichmäßiger Annuität mit 4% verzinst und in 6 Jahren getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Die Annuität berechnet sich ohne Rücksicht auf die Stückelung zu

$$\frac{\text{M } 100000.—}{5.242137} = \text{M } 19076.19.$$

5242137) 10000000 = 1907619
4757863
39940
3245
100
47
0

Die 1. Tilgungsquote ist demnach

	M 19076.19
÷ 4% Zinsen	„ 4000.—
	M 15076.19.

Für die Berechnung der Anzahlen der auszulosenden Stücke betrachten wir aber nicht die gegebene Anleihe von M 100000.—, die in 200 Stücke à M 500.—, sondern eine Anleihe von M 200000.—, die in 200 Stücke à M 1000.— eingeteilt ist. Natürlich müssen wir der Berechnung nun auch die doppelte Tilgungsquote $2 \times \text{M } 15076.19 = \text{M } 30152.38$ zugrunde legen. Die Rechnung stellt sich dann folgendermaßen:

	Tilgungsquote	Stücke	Rest
1.	30.15	30	0.15
+ 4%	1.21		31.36
2.	31.36	31	0.51
+ 4%	1.25		32.61
3.	32.61	33	0.12
+ 4%	1.31		33.92
4.	33.92	34	0.04
+ 4%	1.36		35.28
5.	35.28	35	0.32
+ 4%	1.41		36.69
6.	36.69	37	0.01
		200	

Digitized by Google

Daraus ergibt sich ohne weiteres folgender

Tilgungsplan.

Tilgungsquote Stücke	Tilgungsquote Betrag	Kapital-Rest	Zinsen 4%	Annuität
30	15000	100000	4000	19000
31	15500	85000	3400	18900
33	16500	69500	2780	19280
34	17000	53000	2120	19120
35	17500	36000	1440	18940
37	18500	18500	740	19240
200	100000	362000	14480	114480

Lehrsatz. Will man den Tilgungsplan einer gestückelten Anleihe aufstellen, so berechne man zunächst die Tilgungsquote ohne Rücksicht auf die Stückelung. Darauf stelle man die Anzahl der in jedem Jahre auslosbaren Stücke fest und stelle dann den Tilgungsplan auf.

Ist die Anleihe nicht in Stücke à M 100.— oder M 1000.— geteilt, so berechnet man die Anzahl der auszulosenden Stücke am bequemsten an einer größeren oder kleineren Anleihe, die die gleiche Anzahl entsprechend größerer oder kleinerer Stücke à M 100.— oder M 1000.— hat.

Ist eine Anleihe in Stücke von verschiedener Größe, z. B. à M 100.—, 500.—, 1000.— und 2000.— eingeteilt, so ist bei der Festlegung der Auslosung darauf zu achten, daß das Verhältnis der verschiedenen Stücke untereinander sich nicht zu stark verschiebt.

Eine vollständig gleichmäßige Annuität läßt sich bei dieser Art der Tilgung natürlich nicht mehr erzielen. Die Annuität schwankt in dem 1. Beispiel zwischen M 2700.— und M 2808.—.

Da die Schwankungen aber nicht größer als 1—2 Stücke zu sein brauchen, so fallen sie bei einer größeren Zahl von auszulosenden Stücken kaum ins Gewicht. Bei den folgenden Betrachtungen ist denn auch häufig auf die durch die Stückelung entstehenden Unregelmäßigkeiten keine Rücksicht genommen, um zu einer durchsichtigeren Darstellung zu gelangen.

Digitized by Google

d) Tilgung einer Anleihe mit Aufgeld bei steigender Annuität.

Aufgabe 1. Eine Anleihe von M 10000.— soll mit 4% verzinst und in 4 Jahren mit 10% Aufgeld getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn die Summe aus Zinsen und Tilgungsquote in jedem Jahre die gleiche ist, das Aufgeld dagegen extra gezahlt wird?

Wäre das Aufgeld nicht zu zahlen, so würde man denselben Tilgungsplan wie auf S. 62 erhalten. Zu der gleichen Annuität tritt aber noch das Aufgeld von 10% der Tilgungsquote hinzu.

			2754.90	
	10000.—	400. —	2354.90	235.49
	7645.10	305.80	2449.10	244.91
	5196.00	207.84	2547.06	254.71
	2648.94	105.96	2648.94	264.89
Sa	25490.04	1019.60	10000. —	1000. —

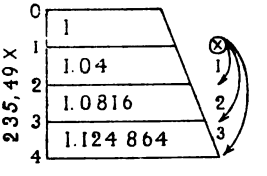
Die Annuität setzt sich also jetzt zusammen aus

Zinsen, Tilgungsquote und Aufgeld

und hat die Werte:

ohne Aufgeld	mit Aufgeld
2754.90	2990.39
2754.90	2999.81
2754.90	3009.61
2754.90	3019.79
Sa. 11019.60	Sa. 12019.60.

Durch das Aufgeld wird die gleichmäßige Annuität zunächst in eine steigende verwandelt. Da die Tilgungsquote jährlich um 4% zunimmt, so muß auch das Aufgeld um diesen Prozentsatz wachsen:



	235.49
+ 4%	9.42
	244.91
+ 4%	9.80
	254.71
+ 4%	10.19
	264.90.

Digitized by Google

Lehrsatz 1. Der Betrag des Aufgeldes wächst jährlich um 4%, falls die Annuität ohne Aufgeld konstant bleibt.

Aufgabe 2. Wie groß ist der Barwert des Aufgeldes?

Der Barwert von	M 1.04,	fällig nach	1 Jahr,	= M	1.—
„ „	„ 1.0816,	„	2 Jahren,	= „	1.—
„ „	„ 1.124864,	„	3 Jahren,	= „	1.—.

Lehrsatz 2. Der Barwert des Aufgeldes am Ende des 1. Jahres ist im vorliegenden Falle 4 × M 235.49 = M 941.96.

Demnach ist der Barwert des Aufgeldes heute M 941.96 × 0.961538 = M 905.73 und der der Anleihe einschließlich Aufgeld M 10905.73.

94196
835169
847764
56518
942
471
28
7
905730

Lehrsatz 3. Ein Kapital von M 100000.—, welches mit 4% verzinst und in 4 Jahren mit 10% Aufgeld getilgt werden soll, kann ersetzt werden durch eine viermalige gleichbleibende Postnumerando-Rente von M 2754.90 und eine steigende Postnumerando-Rente, die mit M 235.49 beginnt und jährlich um 4% zunimmt.

e) Tilgung einer Anleihe mit Aufgeld bei gleichmäßiger Annuität.

Aufgabe. Ein Kapital von M 10000.— soll mit 4% verzinst und in 4 Jahren bei gleichmäßiger Annuität mit 10% Aufgeld zurückgezahlt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Angenommen, der Schuldner hätte sich bei Aufnahme der Anleihe verpflichtet, dieselbe nach den Bedingungen des vorigen Abschnitts zu tilgen. Gleich nach der Aufnahme der Anleihe erscheint ihm jedoch die steigende Annuität unbequem und er setzt sich mit einer Bank in Verbindung, die für ihn die Tilgung der Anleihe übernimmt. Der Schuldner muß nun seinerseits der Bank die nötige Deckung schaffen; er kann dies am einfachsten dadurch tun, daß er der Bank den Barwert der An-

Digitized by Google

leihe einschließlich Aufgeld in einer Summe zahlt. Der Betrag wäre (nach Lehrsatz 2, S. 82)

$$\text{M } 10905.73.$$

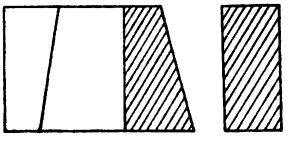
Statt dessen kann er der Bank aber auch eine gleichbleibende viermalige Postnumerando-Rente zusagen, deren Barwert M 10905.73 ist. Der Betrag der Rente würde sich berechnen zu

$$\frac{\text{M } 10905.73}{3.629895} = \text{M } 3004.42.$$

3629895) 10905730 = 300442
16045
1526
74
1

Zu diesem Betrage kann man auch durch eine andere Betrachtung gelangen. Die steigende Annuität setzt sich aus einem gleichbleibenden Teil,

Zinsen + Tilgungsquote,



und einem steigenden,

dem Aufgeld,

zusammen. Für Zinsen und Tilgungsquote fordert die Bank von dem Schuldner jährlich M 2754.90. Der Barwert der Aufgelder ist M 905.73. Die Bank fordert daher dafür eine gleichbleibende Rente von

$$\frac{\text{M } 905.73}{3.629895} = \text{M } 249.52.$$

36299) 90573 = 24952
17975
3455
189
8

Im ganzen fordert sie also jährlich

M 2754.90
+ „ 249.52
M 3004.42 (wie oben).

Betrüge das Aufgeld 20%, so wäre der Barwert

$$2 \times \text{M } 905.73 = \text{M } 1811.46,$$

und die gleichbleibende Rente hierfür wäre

$$2 \times \text{M } 249.52 = \text{M } 499.04.$$

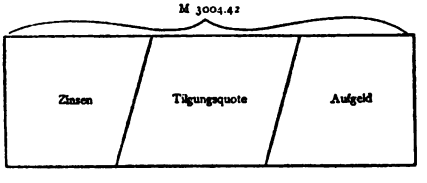
Digitized by Google

Hat man also den Betrag der gleichbleibenden Rente, die einem Aufgeld von 10% entspricht, einmal berechnet, so kann man ihn ohne weiteres für ein beliebiges anderes Aufgeld hinschreiben. Diese Tatsache wird später bei der Kursrechnung zu sehr einfachen Resultaten führen.

Wir waren davon ausgegangen, daß eine Bank für den Schuldner die Zahlung der steigenden Annuität übernimmt und sich dafür von ihm eine Rente von M 3004.42 zahlen läßt. Beide Zahlungen haben denselben Barwert.

Barwert = M 10905.73	Barwert = M 10905.73
Gleichmäßige Rente von M 2754.90	Gleichmäßige Rente von M 2754.90
+	+
steigende Rente beginnend mit M 235.49	gleichmäßige Rente von M 249.52

Natürlich können auch Gläubiger und Schuldner direkt in Verbindung treten und vereinbaren, daß die steigende Rente durch eine gleichbleibende ersetzt wird. Der Schuldner tilgt dann seine Verpflichtung durch gleichbleibende Annuitäten, während der Gläubiger den vollen Barwert seiner Ansprüche in anderer Form ersetzt bekommt. Dabei kann es dem Schuldner gleichgültig sein, welchen Betrag von den M 3004.42 der Gläubiger als Zinsen oder als Tilgungsquote oder als Aufgeld betrachtet — er hat sich nur zur Zahlung von jährlich M 3004.42 verpflichtet.



Der Gläubiger kann dann einen den neuen Bedingungen entsprechenden Tilgungsplan aufstellen.

Die Annuität von M 3004.42 schließt im Jahre M 400.— Zinsen ein, so daß für

Tilgung und Aufgeld M 2604.42

übrig bleiben. Da das

Aufgeld = 10% der Tilgungsquote

ist, so entfallen von den M 2604.42
auf die Tilgungsquote $^{10}/_{11}$ = „ 2367.65
und auf das Aufgeld $^{1}/_{11}$ = „ 236.77
Sa. M 2604.42.

Es bleibt ein Kapitalrest von M 7632.35. Die Zinsen betragen also im nächsten Jahre

Digitized by Google

4% a| M 7632.35 = M 305.29,
so daß für Tilgung und Aufgeld „ 2699.13
verbleiben, wovon

auf die Tilgung $^{10}/_{11}$ = „ 2453.75
und auf das Aufgeld $^{1}/_{11}$ = „ 245.38
Sa. M 2699.13

entfallen.

Fährt man in der Rechnung fort, so erhält man folgenden

Tilgungsplan.

Kapitalrest	Zinsen	Tilgungsquote	Aufgeld
		+ 4*)	
10000.—	400.—	2367.65	236.77
— 4		+ 4	
7632.35	305.29	2453.75	245.38
— 8		+ 4	
5178.60	207.14	2542.98	254.30
— 12		+ 5	
2635.62	105.42	2635.45	263.55
— 24			
25446.57	1017.85	10000.—	1000.—

Lehrsatz 1. Die Zinsen vermindern sich jährlich um 4% der vorjährigen Tilgungsquote.

Um den gleichen Betrag muß sich die Summe von Tilgungsquote und Aufgeld vermehren.

Lehrsatz 2. Die Summe von Tilgungsquote und Aufgeld vermehrt sich jährlich um 4% der vorjährigen Tilgungsquote.

Von diesen 4% entfallen $^{40}/_{11}\%$ auf die Tilgungsquote und $^{4}/_{11}\%$ auf das Aufgeld.

Lehrsatz 3. Die Tilgungsquote vermehrt sich jährlich um $^{40}/_{11}\%$.

Da $^{4}/_{11}\%$ der Tilgungsquote ebensoviel ist wie $^{40}/_{11}\%$ des Aufgeldes (denn das Aufgeld = $^{1}/_{10}$ der Tilgungsquote), so folgt

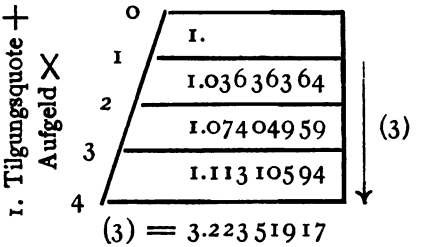
Lehrsatz 4. Das Aufgeld vermehrt sich jährlich um $^{40}/_{11}\%$.

Da sowohl die Tilgungsquote als auch das Aufgeld jährlich um $^{40}/_{11}\%$

*) Über die Bedeutung dieser Korrekturen vgl. unten Lehrsatz 5.

Digitized by Google

wächst, so wächst auch die Summe von Tilgungsquote und Aufgeld jährlich um $^{40}/_{11}\,\%$. Kennt man also diese Summe für das 1. Jahr, so kann man sie für die folgenden Jahre durch Aufzinsung mit $^{40}/_{11}\,\%$ berechnen. (Vgl. S. 66, Lehrsatz 3.) Dadurch erhält man einen Weg, um die Summe von Tilgungsquote und Aufgeld und damit auch die Annuität direkt zu berechnen, ohne erst auf eine Anleihe zurückzugehen, die bei steigender Annuität getilgt werden soll. Die Summe der Tilgungsquoten muß M 10000.— und die Summe der Aufgelder M 1000.— sein. Die Summe von Tilgungsquoten und Aufgeldern muß daher M 11000.— ergeben, d. h.



(3) = 3.22351917

$$(1.\ \text{Tilgungsquote} + \text{Aufgeld}) \times 4.22351917 = \text{M } 11000.—.$$

$$1.\ \text{Tilgungsquote und Aufgeld} = \frac{\text{M } 11000.—}{4.22351917} = \text{M } 2604.46.$$

42235191[7]) 110000000 = 26044631
25529616
188501
19560
2666
132
5

Die gleichmäßige Annuität stellt sich daher auf

M 2604.46
+ „ 400.—
M 3004.46.

Der Barwert einer viermaligen Rente in dieser Höhe ist bei 4 % M 3004.46 × 3.629895 = M 10905.89;

3629895
13644003
108896850
145196
14519
2178
109
4
109058856

Digitized by Google

dagegen war der Barwert der steigenden Annuitäten M 10905.73. Während nun die steigende Annuität mit dem Barwert von M 10905.73 zur vollständigen Tilgung der Anleihe von M 10000.— und zur Zahlung des Aufgeldes hinreichend war (siehe den Tilgungsplan S. 85), ist dies bei einer gleichmäßigen Rente von demselben Barwert nicht mehr der Fall. Wie aus dem Tilgungsplan S. 85 hervorgeht, bleibt ein Rest von M 0.17 ungetilgt.

Der Barwert der genau gerechneten Annuität von M 3004.46 ist vielmehr M 10905.89, sodaß der Tilgungsplan zu korrigieren ist.

Daraus folgt zunächst der

Lehrsatz 5. Bei einer Änderung des Tilgungsmodus ändert sich der Wert der Anleihe selbst.

Da aber die Differenz selbst bei einem so hohen Aufgeld sehr klein ist — bei 5% Aufgeld beträgt die Differenz in der Annuität nur M 0.01 —, so kann man bei der Berechnung der gleichmäßigen Annuität ruhig von der steigenden ausgehen. Auf den ersten Blick erscheint zwar die zweite, direkte Berechnung einfacher. Sie setzt aber voraus, daß eine $3^{7}/_{11}$%ige Rententafel bereits vorhanden ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die indirekte Berechnung der Annuität erheblich leichter.

Da 4% auf M 10000.— gerade soviel ist wie $^{40}/_{11}$% auf M 11000.—, so kann der obige Tilgungsplan aufgefaßt werden als Tilgungsplan für eine Anleihe von nominell M 11000.—, die mit $3^{7}/_{11}$% zu verzinsen und ohne Aufgeld in 4 Jahren bei gleichmäßiger Annuität zu tilgen ist. Als Tilgungsquote ist dann die Summe von Tilgungsquote und Aufgeld zu nehmen.

Anmerkung. Der Zinsfuß $^{40}/_{11} = 3^{7}/_{11}$ wird der Ersatzzinsfuß genannt.

Bei einer nominellen Verzinsung von $3^{1}/_{2}$, 4 und $4^{1}/_{2}$% würden folgende Ersatzzinsfüße nötig sein.

Aufgeld	nom. $3^{1}/_{2}$%	nom. 4%	nom. $4^{1}/_{2}$%
1%	$3^{47}/_{101}$	$3^{97}/_{101}$	$4^{46}/_{101}$
2%	$3^{22}/_{51}$	$3^{46}/_{51}$	$4^{21}/_{51}$
3%	$3^{41}/_{103}$	$3^{91}/_{103}$	$4^{38}/_{103}$
4%	$3^{19}/_{52}$	$3^{11}/_{13}$	$4^{17}/_{52}$
5%	$3\ ^{1}/_{8}$	$3^{17}/_{21}$	$4\ ^{2}/_{7}$

Nur für die beiden Werte $3^{1}/_{2}$% und $3^{7}/_{21}$% sind bei Spitzer Tabellen gerechnet. Man sieht hieraus, daß die Berechnung der Annuität mit Hilfe des Ersatzzinsfußes keine praktische Bedeutung hat. Eine eingehende Darstellung dieser Methode kann deshalb unterbleiben.

Digitized by Google

7. Anleihekurse.

a) Die Kurse der ewigen Renten (Konsols).

Aufgabe 1. Ein 3%iges Rentenpapier hat einen Nominalwert von M 1000.—. Wieviel wird jemand dafür zahlen, der von seiner Anlage eine 4%ige Verzinsung erwartet?

1. Kurs zu Anfang des Jahres:

Der Preis des Papiers war schon auf S. 34 berechnet und zwar nach der Formel

$$\frac{\text{M } 1000 \times 3}{4} = \text{M } 750.—.$$

Drückt man den Kurs in Prozenten aus, so berechnet er sich als

$$\frac{100 \times 3}{4} = 75\,\%.$$

Anmerkung. Im vorliegenden Beispiel ist

3% der nominelle Zinsfuß
4% „ effektive „ ,
M 1000.— das Nominalkapital,
„ 750.— „ Realkapital.

Lehrsatz 1. Der Kurs ist gleich dem Quotienten aus Realkapital durch Nominalkapital multipliziert mit 100.

$$\frac{\text{Realkapital}}{\text{Nominalkapital}} \times 100 = \frac{750}{1000} \times 100 = 75.$$

Lehrsatz 2. Der Kurs einer ewigen Rente zu Anfang des Jahres ist gleich dem Quotienten aus effektivem Zinsfuß und nominellem Zinsfuß multipliziert mit 100:

$$\frac{\text{effektiver Zinsfuß}}{\text{nomineller Zinsfuß}} \times 100 = \frac{3}{4} \times 100 = 75.$$

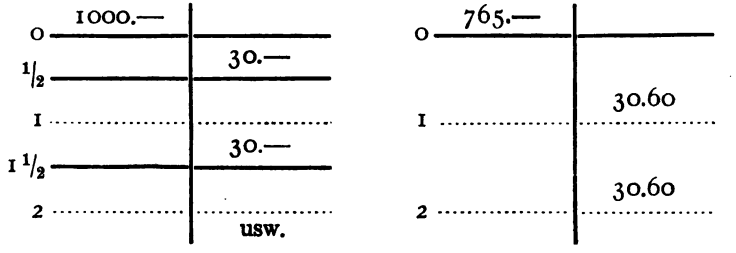
2. Kurs nach $^1/_2$ Jahre:

Der Besitzer erhält zuerst nach $^1/_2$ Jahre M 30.— Zinsen, dann wieder nach $1\,^1/_2$ Jahren usw.

Digitized by Google

Ist der Besitzer imstande, die nach $^1/_2$ Jahre empfangenen M 30.— 4 %ig anzulegen, so wachsen sie bis zum Ende des 1. Jahres an zu

	M 30.—
+ 2 %	„ —.60
	M 30.60 (vgl. S. 38).



Das Papier gewährt ihm also eine ewige Rente von M 30.60, deren Barwert

$$\frac{\text{M } 30.60 \times 1000}{40} = \text{M } 765.—$$

ist. Der Käufer muß aber nach deutscher Usance dem früheren Besitzer Zinsen vergüten und zwar

$$3\,\% \mid 180 \text{ Tage a} \mid \text{M } 1000.— = \text{M } 15.—.$$

Da er im ganzen nur M 765.— anlegen will, so wird er für das Papier nur

	M 765.—
+ Zinsen	„ 15.—
	M 750.—

zahlen.

Lehrsatz 3. Notiert der Kurs eines Papiers exklusive Zinsen, so berechnet er sich nach der Formel

$$\frac{\text{Realkapital} \div \text{Zinsen}}{\text{Nominalkapital}} \times 100 = \frac{765 - 15}{1000} \times 100 = 75 \text{ (wie oben).}$$

Bei der Berechnung war angenommen, daß der Käufer die nach $^1/_2$ Jahr fälligen Zinsen 4 %ig anlegen kann. Ist er hierzu nicht imstande, so wird er für das Papier einen geringeren Preis zahlen, um sich im ganzen eine 4 %ige Rentabilität zu sichern. Kann er die Zinsen z. B. nur 2 %ig anlegen, so haben sie für ihn am Ende des Jahres nur den Wert von

Digitized by Google

$$\begin{array}{rr} & \text{M } 30.— \\ +2\% \,/\, 180 \text{ Tage} & \text{„ } \quad 0.30 \\ \hline & \text{M } 30.30. \end{array}$$

Der Barwert dieser ewigen Rente ist aber nur

$$\frac{\text{M } 30.30 \times 1000}{40} = \text{M } 757.50.$$

Da M 15.— Zinsen zu vergüten sind, so stellt sich der Preis des Papiers auf

$$\begin{array}{rr} & \text{M } 757.50 \\ \div \text{ Zinsen} & \text{„ } \quad 15.— \\ \hline & \text{M } 742.50 \end{array}$$

und der Kurs auf 74.25.

Lehrsatz 4. Im Laufe des Jahres hängt der Kurs u. a. von dem Zinsfuß ab, zu dem die Zinsen angelegt werden können.

Für Papiere mit $^1/_2$ jährigem Kupon gelten ganz analoge Betrachtungen. Vgl. Aufgabe 3, S. 46. Insbesondere ist Lehrsatz 4 zu beachten.

Aufgabe 2. Wie hoch stellt sich bei 4% effektiver Verzinsung der Kurs eines Rentenpapiers, wenn dasselbe 10 Jahre lang eine 4%ige, dann eine $3^1/_2$%ige Verzinsung gewährt?

1. Zu Anfang des 11. Jahres stellt sich der Kurs bei 4%iger effektiver Verzinsung auf

$$\frac{3.50 \times 100}{4} = 87.50.$$

Der heutige Kurs berechnet sich daher als Barwert einer 10maligen Postnumerando-Rente von M 4.— und eines nach 10 Jahren fälligen Kapitals von M 87.50:

	(91.55)	
0		
		4.—
1		
		4.—
2		
		4.—
9		
	(87.50)	4.—
10		
		3.50
11		
		3.50
12		
		usw.

$$4 \times 8.110896 + 87.50 \times 0.675564$$
$$= 32.44^3 + 59.11^2$$
$$= 91.55^5.$$

$$\begin{array}{r} 875 \\ \underline{65576} \\ 52500 \\ 6125 \\ 438 \\ 44 \\ \underline{6} \\ 59112 \end{array}$$

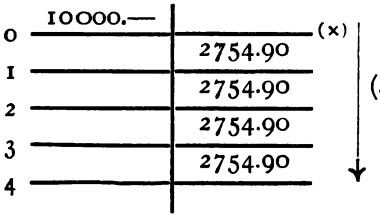
Digitized by Google

2. Der Kurs läßt sich auch als Barwert einer ewigen Rente von M 3.50 zuzüglich des Barwerts einer 10maligen Postnumerando-Rente von M —.50 berechnen:

$$87.50 + 0.50 \times 8.110896$$
$$= 87.50 + 4.055$$
$$= 91.55^5 \quad \text{(wie oben)}.$$

b) Kurs einer Anleihe, die durch gleichmäßige Annuitäten verzinst und getilgt wird.

Aufgabe 1. Jemand wünscht, eine Anleihe von nominell M 10000.— aufzunehmen, die bei gleichmäßiger Annuität mit 4% verzinst und in den nächsten 4 Jahren getilgt werden soll. Zu welchem Kurse wird eine Bank diese Anleihe übernehmen, wenn sie von der Kapitalsanlage eine $4\frac{1}{2}$%ige Verzinsung verlangt?



Die Anleihe repräsentiert für den Gläubiger eine viermalige Postnumerando-Rente von M 2754.90 (siehe S. 64).

Der Barwert einer Postnumerando-Rente von jährlich M 1.— ist bei $4\frac{1}{2}$% nach der Tabelle II

M 3.587526,

mithin der einer Rente von M 2754.90

M 2754.90 × 3.587526 = M 9883.27,

während der Barwert dieser Rente bei 4%

M 2754.90 × 3.629895 = M 10000.— ist.

3587526	3629895
94572	94572
7175052	7259790
2511268	2540927
179376	181495
14350	14519
3228	3266
9883274	9999997

Die Bank wird also für das Nominalkapital von M 10000.— nur das Realkapital von M 9883.27 zahlen, für je M 100.— also

Digitized by Google

$$\frac{\text{M } 9883.27}{10000} \times 100 = \text{M } 98.83^{27}.$$

Diesen Kurs zu Anfang des 1. Jahres nennt man den Begebungskurs.

Lehrsatz 1. Der Begebungskurs berechnet sich nach der Formel

$$\frac{\textbf{Realkapital}}{\textbf{Nominalkapital}} \times \mathbf{100}.$$

Da das Realkapital $= \text{M } 2754.90 \times 3.587526$
und das Nominalkapital $= \text{„ } 2754.90 \times 3.629895$
ist, so kann man den Kurs auch berechnen als

$$\frac{2754.90 \times 3.587526}{2754.90 \times 3.629895} \times 100 = \frac{3.587526}{3.629895} \times 100 = 98.83^{27}$$

362989[5]) 3587526 = 988327
320620
30229
1190
101
28
3

Lehrsatz 2. Der Begebungskurs obiger Anleihe berechnet sich nach der Formel

$$\frac{\textbf{4. Renten-Abzinsungsfaktor bei } 4\,^1/_2\,\%}{\textbf{4. Renten-Abzinsungsfaktor bei } 4\,\%} \times \mathbf{100}.$$

Der Kurs ist also unabhängig von der Höhe der Annuität, bzw. der Höhe des Anleihebetrages.

Aufgabe 2. Wie stellt sich der Kurs der obigen Anleihe zu Anfang des 2., 3. und 4. Jahres?

Zu Anfang des 2. Jahres (nach 1 Jahr) steht noch eine dreimalige Postnumerando-Rente von M 2754.90 aus. Ihr Barwert ist bei $4\,^1/_2\,\%$ (Realkapital)

$$\text{M } 2754.90 \times 2.748964$$

und bei 4% (Nominalkapital)

$$\text{M } 2754.90 \times 2.775091.$$

Der Kurs berechnet sich also zu

$$\frac{2754.90 \times 2.748964}{2754.90 \times 2.775091} \times 100 = 99.06.$$

2775[1]) 27490 = 9906
2514
16

Digitized by Google

Entsprechend erhält man für die Anfänge des 3. und 4. Jahres

$$\frac{1.872668}{1.886095} \times 100 = 99.29$$

und

$$\frac{0.956938}{0.961538} \times 100 = 99.52.$$

1886[1])	18727	= 9929	9615[4])	95694	= 9952
	1752			9155	
	54			501	
	16			20	
	0			1	

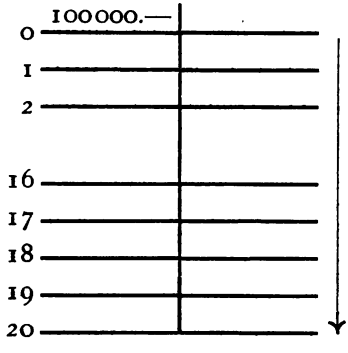
Lehrsatz 3. Der Kurs obiger Anleihe stellt sich bei gleichbleibender effektiver Verzinsung von $4\frac{1}{2}\%$ zu Anfang des

1. Jahres auf 98.83
2. „ „ 99.06
3. „ „ 99.29
4. „ „ 99.52.

Aufgabe 3. Eine Anleihe von M 100000.— soll bei gleichmäßiger Annuität mit 4% verzinst und in 20 Jahren getilgt werden. Wie hoch stellt sich der Kurs zu Anfang des 1., 17., 18., 19. und des 20. Jahres, wenn eine $4\frac{1}{2}\%$ige effektive Verzinsung verlangt wird?

Die Anleihe von M 100000.— repräsentiert eine Rente in Höhe der Annuität. (Ihr Betrag ist für die Kursrechnung gleichgültig.)

Zu Anfang des 1. Jahres (nach 0 Jahren) ist das



Nominalkap. = Ann. × 13.590326

und das

Realkap. = Ann. × 13.007936.

Der Kurs stellt sich also auf

$$\frac{13.007936}{13.590326} \times 100 = 95.72.$$

1359)	13008	= 9572
	777	
	97	
	2	

Zu Anfang des 17. Jahres stehen noch 4 Annuitäten aus. Der Kurs stellt sich daher bei einem effektiven Zinsfuß von $4\frac{1}{2}\%$ auf

$$\frac{\text{Annuität} \times 3.587526}{\text{Annuität} \times 3.629895} \times 100 = 98.83 \text{ (vgl. Aufgabe 1).}$$

Digitized by Google

Entsprechend erhält man für die Anfänge des 18., 19. und 20. Jahre.

$$18. \quad \frac{2.748964}{2.775091} \times 100 = 99.06$$

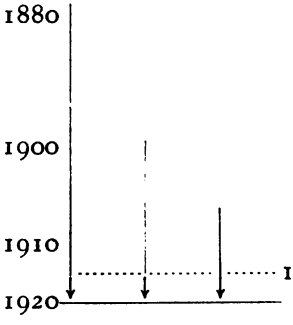
$$19. \quad \frac{1.872668}{1.886095} \times 100 = 99.29$$

$$20. \quad \frac{0.956938}{0.961538} \times 100 = 99.52 \quad \text{(vgl. Aufgabe 2).}$$

Obwohl also die in Aufgabe 1 und Aufgabe 3 beschriebenen Anleihen in Betrag und Tilgungszeit ganz verschieden sind, erhält man doch für das letzte, 2. letzte, 3. letzte usw. Jahr dieselben Kurse.

Lehrsatz 4. Der Kurs einer Anleihe, die durch gleichmäßige Annuitäten verzinst und getilgt wird, ist unabhängig von der Größe der Anleihe und der Größe der Annuität. Er bestimmt sich vielmehr lediglich durch den effektiven Zinsfuß, den nominellen Zinsfuß und die Anzahl der Jahre, welche noch bis zur vollständigen Tilgung der Anleihe erforderlich sind.

Zusatz. Alle Anleihen, welche in demselben Jahre ihrer vollständigen Tilgung entgegengehen und mit demselben Zinsfuß verzinst werden, haben zu ein und derselben Zeit und bei demselben effektiven Zinsfuß ein und denselben Kurs.



Denkt man sich drei 4 %ige Anleihen, von denen die erste im Jahre 1880 mit 40jähriger Tilgungsdauer, die zweite 1900 mit 20jähriger und die dritte 1910 mit 10jähriger Tilgungsdauer emittiert ist, die also alle drei im Jahre 1920 vollständig getilgt werden, so wird sich der Kurs bei allen im Jahre 1917 auf 98.83 stellen, wenn von allen die gleiche effektive Verzinsung von $4\frac{1}{2}$ % verlangt wird.

Es scheint nicht unnötig zu sein, auf diese Tatsache ausdrücklich aufmerksam zu machen, da sie einen Weg zeigt, wie eine Vereinheitlichung der festverzinslichen Werte erreicht werden kann. Es ist z. B. darüber geklagt worden, daß die Städte für ihre Anleihen den Markt nicht so offen fänden, wie sie es bei der Sicherheit und der Höhe des Zinsfußes derselben erwarten könnten. Ein Grund für diese verminderte

Digitized by Google

Marktfähigkeit ist jedenfalls die starke Zersplitterung des städtischen Anleihewesens*). Hat z. B. eine Stadt in vier verschiedenen Jahren Anleihen von gleichem Zinsfuß emittiert, so werden diese trotz des gleichen Zinsfußes zu vier verschiedenen Kursen gehandelt; und da es mit den Anleihen anderer Städte ebenso geht, so entsteht eine außerordentliche Fülle von Notierungen für Papiere, die eigentlich alle dieselbe Sicherheit und fast alle dieselbe nominelle Verzinsung bieten.

Die Resultate des letzten Abschnittes zeigen nun, daß eine wesentliche Vereinheitlichung des Kurszettels erreicht würde, wenn die Städte sich entschließen würden, als letzte Tilgungsjahre z. B. nur runde Jahrzehnte zu wählen. Eine im Jahre 1911 emittierte Anleihe sollte nicht tilgbar sein bis 1951, sondern bis 1950, und bei einer Emission im Jahre 1916 sollte man sich für das Schlußjahr 1950 oder 1960 entscheiden. Durch eine geringe Verstärkung oder Schwächung der Auslosung der bereits laufenden Anleihen könnte man auch diese in solche der vorgeschlagenen Art umwandeln, ohne daß dadurch eine wesentliche Änderung im Anleihedienst der Städte, noch eine beträchtliche Verschiebung der Kurse herbeigeführt würde.

Am 1. Januar 1913 würden sich die Kurse von $3^1/_2$ und $4\,\%$igen Anleihen bei einem effektiven Zinsfuß von z. B. $3^7/_8\,\%$ folgendermaßen stellen:

Kurse von Anleihen, die tilgbar sind bis 31. Dezember
(effektiver Zinsfuß $3^7/_8\,\%$)

	nom. Zinsfuß $3^1/_2\,\%$	nom. Zinsfuß $4\,\%$
1920	98.46	100.52
1930	96.96	101.02
1940	95.69	101.46
1950	94.63	101.82
1960	93.74	102.13

Anhang. Die Benutzung von Kurstabellen**).

Aus Lehrsatz 4 ergibt sich eine weitere wichtige Folgerung. Da die Kurse aller Anleihen dieses Typs nur abhängen von dem nominellen und

*) Schmalenbach: Zur Frage der Vereinheitlichung von Städte-Anleihen, Zeitschr. f. handelsw. Forschung, Bd. III, S. 541.

Des Autors gleichlautender Artikel. Daselbst Bd. V, S. 634.

**) G. Schinkenberger: Handbuch der Berechnung von Anleihen und Annuitäten usw. Frankfurt a. M. 1888.

Digitized by Google

dem effektiven Zinsfuß und der Tilgungsdauer, so lassen sich dieselben ein für alle Male im voraus berechnen und zu Tabellen zusammenstellen. Aus einer solchen Tabelle läßt sich dann im gegebenen Fall ein gesuchter Kurs ohne weiteres entnehmen.

Die in Aufgabe 3 gesuchten Kurse findet man z. B. bei Schinkenberger S. 26 unter Kapitalverzinsung $4^1/_2\,\%$, $4\,\%$ nominell

Tilgungszeit	20 Jahre	95.72	
„	3 „	99.06	
„	2 „	99.26	
„	1 Jahr	99.52	(wie oben).

Ist entweder der nominelle oder der effektive Zinsfuß nicht in der Tabelle enthalten, so kann man trotzdem den gesuchten Kurs bequem mit Hilfe der Tabelle finden.

Aufgabe. Wie hoch stellt sich der Emissionskurs der in Aufgabe 3 beschriebenen Anleihe, wenn eine effektive Verzinsung von $4^7/_{16}\,\%$ verlangt wird?

Bei effektiv	$4^3/_8\,\%$ stellt sich der Kurs auf	96.76,
„ „	$4^1/_2\,\%$ „ „ „ „ „	95.72
	Differenz	1.04.

Bei effektiv $4^7/_{16}\,\%$ stellt sich daher der Kurs auf

$$96.76 - \frac{1.04}{2} = 96.24.$$

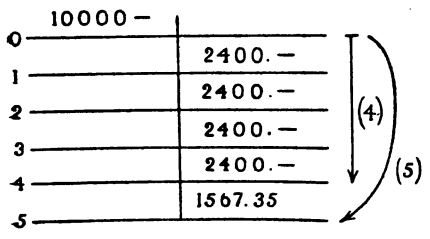
c) Kurs einer Anleihe, die nach einem festen Prozentsatz des Anfangskapitals getilgt wird.

Aufgabe. Eine Anleihe von M 10000.— soll jährlich mit $4\,\%$ verzinst und mit $20\,\%$ getilgt werden. Wie hoch stellt sich der Begebungskurs, wenn eine $4^1/_2\,\%$ige Verzinsung verlangt wird?

Wie oben (S. 73) ausgeführt, wird die Anleihe durch eine viermalige Annuität von M 2400.— und eine am Ende des 5. Jahres zu leistende Zahlung von M 1567.35 getilgt. Das Nominalkapital bei der Emission ist M 10000.— oder, als Barwert der Annuitäten bei $4\,\%$ dargestellt,

$$\text{M } 2400 \times 3.629895 + \text{M } 1567.35 \times 0.821927$$
$$= \text{M } 8711.75 + \text{M } 1288.25 = \text{M } 10000.—.$$

Digitized by Google



3629895 × 24	821927
7259790	537651
1451958	821927
8711748	410964
	49315
	5753
	246
	41
	1288246

Das Realkapital (Barwert bei $4\frac{1}{2}\%$) ist

$$M\ 2400 \times 3.587526 + M\ 1567.35 \times 0.802451$$
$$= M\ 8610.06 + M\ 1257.72 = M\ 9867.78.$$

3587526 × 24	156735
7175052	154208
14350104	1253880
86100624	3135
	627
	78
	2
	1257722

Der Kurs ist demnach:

$$\frac{\text{Realkapital}}{\text{Nominalkapital}} \times 100 = \frac{9867.78}{10000.-} \times 100 = 98.68.$$

Einfacher stellt sich die Berechnung folgendermaßen:

Wird eine 4%ige Anleihe durch gleichmäßige Annuitäten in 5 Jahren getilgt, so ist der Kurs bei $4\frac{1}{2}\%$iger effektiver Verzinsung (vgl. S. 92)

$$\frac{4.389977}{4.451822} = 98.61,$$

$$4451^{8})\ \ 43900 = 9861$$
$$3834$$
$$273$$
$$6$$

während er bei 4jähriger Tilgungszeit unter denselben Bedingungen

98.83

ist (vgl. S. 92).

Der Kurs der vorliegenden Anleihe wird also

zwischen 98.61 und 98.83

liegen.

Digitized by Google

4. 98.83 } Diff. 0.22 ⟩ 15
5. 98.61 } ⟩ 7

Geht man von dem Kurs 98.83 der 4 jährigen Tilgungszeit aus, so kann man schließen:

Durch eine weitere Zahlung im 5. Jahre von M 2400.— sinkt der Kurs um 0.22, mithin bei einer Zahlung von M 1.— um $\frac{0.22}{2400.—}$ und durch eine Zahlung von M 1567.35 um

$$\frac{0.22 \times 1567.35}{2400} = 0.15$$

Mithin stellt sich der Kurs auf

$$\begin{array}{r} 98.83 \\ \div\ 0.15 \\ \hline 98.68 \end{array}$$ (wie oben).

Lehrsatz 1. Wird eine Anleihe durch vier gleichmäßige Annuitäten und eine Restzahlung getilgt, so ermittelt man ihren Kurs entweder nach der Formel

$$\frac{\text{Realkapital}}{\text{Nominalkapital}} \times 100,$$

oder aber man berechnet die Kurse ohne Rücksicht auf die Restzahlung für eine 4 jährige und eine 5 jährige Tilgungsdauer, teilt die Differenz dieser beiden Kurse im Verhältnis der Restzahlung zur Annuität und addiert diesen Betrag zu dem niedrigeren Kurs.

Lehrsatz 2. Da nur das Verhältnis von Restzahlung zur Annuität auf den Kurs einwirkt, so ist dieser wiederum unabhängig von der Höhe der Annuität selber. Die Sätze des vorigen Abschnittes finden daher entsprechende Anwendung.

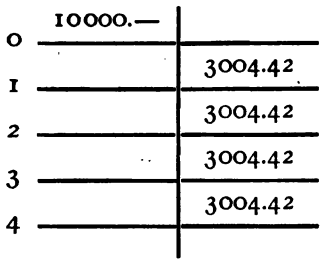
Die zweite Berechnung ist deshalb einfacher, weil die Kurse für eine 4 jährige und 5 jährige Tilgungszeit den Kurstabellen von Schinkenberger entnommen werden können, so daß nur die Differenz von 0.15 berechnet werden muß. Bei dieser Rechnung kommt aber nur eine Genauigkeit von 2 Ziffern in Betracht.

d) Kurs einer Anleihe, die bei gleichmäßiger Annuität mit Aufgeld zurückgezahlt wird.

Aufgabe 1. Ein Kapital von M 10000.— soll mit 4% verzinst und in 4 Jahren bei gleichmäßiger Annuität mit 10% Aufgeld zurückgezahlt

Digitized by Google

werden. Wie hoch stellt sich der Begebungskurs bei 4%iger effektiver Verzinsung?



Es war (S. 83) gezeigt worden, daß die Anleihe für Zinsen, Tilgung und Aufgeld die Annuität von M 3004.42 erfordert. (Genauer berechnete sich die Annuität zu M 3004.46, doch möge auf diese Differenz keine Rücksicht genommen werden, da sie für die Kursberechnung praktisch nicht in Betracht kommt.)

Der Barwert dieser Annuitäten war bei 4% zu M 10905.73 (genauer 10905.89) berechnet worden. Dieser Wert repräsentiert im vorliegenden Falle das Realkapital, während das Nominalkapital M 10000.— ist. Der Begebungskurs stellt sich daher auf

$$\frac{10905.73}{10000} \times 100 = 109.06.$$

Wäre die Anleihe ohne Aufgeld rückzahlbar, so wäre der Kurs bei 4% effektiv 100. Das Aufgeld von 10% bedingt also einen

Kurszuschlag von 9.06%.

Aufgabe 2. Wie hoch stellt sich der Begebungskurs bei einem Aufgeld von 20%, 5%, 100%?

Ein	Aufgeld	von	10%	hat	den	Barwert	von	905.73
„	„	„	20%	„	„	„	„	1811.46
„	„	„	5%	„	„	„	„	452.87
„	„	„	100%	„	„	„	„	9057.30

(vgl. S. 82).

Dementsprechend bedingt

ein	Aufgeld	von	10%	einen	Kurszuschlag	von	9.06%,
„	„	„	20%	„	„	„	18.11%,
„	„	„	5%	„	„	„	4.53%,
„	„	„	100%	„	„	„	90.57%.

Lehrsatz 1. Der Kurszuschlag ist proportional dem Aufgeld.

(Je höher das Aufgeld ist, desto größer werden die Abweichungen von dem genau berechneten Kurse; bei 100% stellt sich der Kurs genau gerechnet auf 190.66, also 9 Pf. höher.)

Digitized by Google

Aufgabe 3. Wie hoch stellt sich der Begebungskurs bei einem effektiven Zinsfuß von $4\frac{1}{2}\%$?

		(×)
2754.90	249.52	
2754.90	249.52	(4)
2754.90	249.52	
2754.90	249.52	↓

1. Die Annuität von M 3004.42 hatten wir uns zerlegt gedacht in eine solche von M 2754.90 und M 249.52 (vgl. S. 83).

Der Barwert der ersten bei $4\frac{1}{2}\%$ war berechnet zu M 9883.27. Diesem Teil der Annuitäten entspricht ein Kurs von

$$\frac{3.587526}{3.629895} \times 100 = 98.83,$$

d. h. der Kurs einer 4%igen Anleihe, die ohne Aufgeld rückzahlbar ist (vgl. S. 93).

Der Barwert des anderen Teils der Annuitäten ist

$$\text{M } 249.52 \times 3.587526 = \text{M } 895.16.$$

$$\begin{array}{r} 3587526 \\ 25942 \\ \hline 717505 \\ 143501 \\ 32288 \\ 1794 \\ 72 \\ \hline 895160 \end{array}$$

Dem entspricht ein Kurszuschlag von 8.95, so daß sich der Kurs auf

98.83 = Kurs der Anleihe ohne Aufgeld bei $4\frac{1}{2}\%$ effektiv
+ 8.95 = Kurszuschlag für das Aufgeld bei $4\frac{1}{2}\%$ effektiv
107.78 = Kurs der Anleihe mit Aufgeld bei $4\frac{1}{2}\%$ effektiv

stellt.

2. Den Kurs kann man auch auf andere Weise berechnen.

Bei 4%iger effektiver Verzinsung ist der Barwert der gesamten Annuität (siehe S. 84)

M 10905.73;

der Kurs berechnete sich daher bei 4% effektiv zu

M 109.06.

Diesem Barwert entspricht eine gleichmäßige Rente von

$$\frac{\text{M } 10905.73}{3.629895} = \text{M } 3004.42.$$

Digitized by Google

Der Barwert dieser Rente ist bei $4^1/_2\,\%$ effektiv

$$\frac{M\ 10905.73}{3.629895} \times 3.587526 = \frac{M\ 10905.73}{100} \times \frac{3.587526}{3.629895} \times 100.$$

Nun ist aber

$$\frac{3.587526}{3.629895} \times 100 = 98.83 \text{ (siehe oben).}$$

Der Barwert der gesamten Annuitäten ist daher

$$\frac{M\ 10905.73}{100} \times 98.83 = M\ 10778.43$$

und der Kurs

$$\frac{109.06 \times 98.83}{100} = 107.78 \text{ (wie oben).}$$

1090573	9883
723889	60901
9815157	9883
872459	889
87246	6
3272	10778
218	
76	
10778428	

Lehrsatz 2. Der Kurs einer 4%igen Anleihe, die ohne Aufgeld in 4 Jahren getilgt wird, ist bei $4^1/_2\,\%$iger effektiver Verzinsung 98.83. Der Kurs einer 4%igen Anleihe, die mit 10% Aufgeld in 4 Jahren getilgt wird, ist bei 4%iger effektiver Verzinsung 109.06. Der Kurs einer 4%igen Anleihe, welche in 4 Jahren mit 10% Aufgeld getilgt wird, ist dann bei $4^1/_2\,\%$iger effektiver Verzinsung

$$\frac{98.83 \times 109.06}{100} = 107.78.$$

3. Man gehe aus von einer 4%igen Anleihe, die in 4 Jahren mit 100% Aufgeld zurückgezahlt werden soll, und denke sich, der Gläubiger erhielte vom Schuldner 100 Stücke à M 100.—, die eine 4%ige Verzinsung und eine planmäßige Auslosung versprechen. Jedem Stücke sei dann noch ein Schein angeheftet, der das Aufgeld von M 100.— zusagt. Der Besitzer eines solchen Doppelscheines erhält jährlich M 4.— Zinsen und bei der Auslosung M 200.—. Statt dessen könnte dem Gläubiger aber auch ein Doppelschein ausgeliefert werden, bei dem jede Hälfte

Digitized by Google

M 2.— Zinsen und im Falle der Auslosung M 100.— verspricht. Jede Hälfte stellt dann ein ganzes Stück einer 2%igen Anleihe dar. Der Kurs eines solchen Stückes wäre bei 4% effektiv

4%	0%
M 100.—	M 100.—

M 2.—	M 2.—
M 100.—	M 100.—

$$\frac{3.629895}{3.807729} \times 100 = 95.33.$$

3807[7]) 36299 = 9533
2030
126
12

Der Preis eines Doppelstückes, d. h. der Kurs der 4%igen à M 200.— rückzahlbaren Anleihe ist demnach

$$2 \times 95.33 = 190.66 \quad \text{(vgl. S. 99)}.$$

Lehrsatz 3. Der Kurs einer 4%igen Anleihe, die bei gleichmäßiger Annuität mit 100% Aufgeld getilgt wird, ist doppelt so hoch wie der Kurs einer 2%igen Anleihe, die in der gleichen Zeit bei gleichmäßiger Annuität ohne Aufgeld getilgt wird.

Der Kurs der Anleihe mit 10% Aufgeld würde sich wieder zu 109.06 berechnen.

Soll die Anleihe mit $33\frac{1}{3}$% Aufgeld zurückgezahlt werden, so kann man sich die M 4.— Zinsen zu M 3.— und M 1.— auf die beiden Stücke à M 100.— und à M $33\frac{1}{3}$ verteilt denken, und da

4%	0%
M 100.—	M $33\frac{1}{3}$

M 3.—	M 1
M 100.—	M $33\frac{1}{3}$

M 3.— = 3% a/ M 100.—
„ 1.— = 3% a/ „ $33\frac{1}{3}$

sind, so stellen beide Teile Stücke einer 3%igen Anleihe vor. Der Preis (Kurs) eines 3%igen Stückes à M 100.— ist bei 4% effektiv

$$\frac{3.629895}{3.717098} \times 100 = 97.65.$$

3717[1]) 36299 = 9765
2845
243
20
1

Der Preis $\frac{1}{3}$ Stückes ist daher

$$\frac{1}{3} \times 97.65 = 32.55$$

und der von $1\frac{1}{3}$ Stücken

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 97.65 \\ +\ 32.55 \\ \hline 130.20. \end{array}$$

Einem Aufgeld von $33\frac{1}{3}\%$ entspricht ein Kurszuschlag von 30.20, mithin einem Aufgeld von 10% ein solcher von 9.06. Der Kurs stellt sich demnach bei 10% Aufgeld wieder auf 109.06.

Lehrsatz 4. Der Kurs einer 4%igen Anleihe, die bei gleicher Annuität mit $33\frac{1}{3}\%$ Aufgeld getilgt wird, ist gleich dem um $\frac{1}{3}\%$ vermehrten Kurse einer 3%igen Anleihe, die in der gleichen Zeit bei gleicher Annuität ohne Aufgeld getilgt wird.

4%	0%
M 100.—	M 10.—

M $40/11$	M $4/11$
M 100.—	M 10.—

Versucht man, auf dieselbe Weise den Kurs einer Anleihe, die mit 10% Aufgeld rückzahlbar ist, direkt zu berechnen, so muß man die M 4.— Zinsen zu M $40/11$ und M $4/11$ verteilen. Man gelangt also zu der auf S. 87 besprochenen Schwierigkeit, die im allgemeinen die direkte Berechnung der Kurse verhindert.

Entsprechend kann man auch den Kurs einer Anleihe mit Aufgeld bei einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}\%$ effektiv berechnen.

Der Kurs eines 2%igen Stückes à M 100.— ist bei $4\frac{1}{2}\%$ effektiv

M 2.—	M 2.—
M 100.—	M 100.—

$$\frac{3.587526}{3.807729} \times 100 = 94.22.$$

$3807^{7})\quad 35875 = 9422$
1606
83
7

Der Preis eines Doppelstückes, d. h. der Kurs der 4%igen Anleihe mit 100% Aufgeld ist demnach 188.44, während der Kurs der Anleihe ohne Aufgeld bei $4\frac{1}{2}\%$ effektiv 98.83 ist (vgl. S. 93).

Der Kurs erhöht sich durch das Aufgeld von 100% um

$$\begin{array}{r} 188.44 \\ -\ 98.83 \\ \hline 89.61, \end{array}$$

bei einem Aufgeld von 10% also um 8.96 und stellt sich demnach auf

$$\begin{array}{r} 98.83 \\ +\ 8.96 \\ \hline 107.79 \end{array}$$ (vgl. S. 101).

Digitized by Google

Lehrsatz 5. Man ist bei der Kursberechnung nicht auf die auf S. 87 angegebenen Ersatzzinsfüße angewiesen, sondern man kann den Kurs zunächst für ein Aufgeld — z. B. 100% —, dem ein bequemer Zinsfuß entspricht, berechnen und von da aus auf das gegebene Aufgeld schließen*).

Aufgabe 4. Ein industrielles Unternehmen will eine 4%ige in 25 Jahren tilgbare Anleihe emittieren zu einer Zeit, wo der Zinsfuß für solche Anleihen $4\frac{1}{2}$% beträgt. Welches Aufgeld muß das Unternehmen für die Rückzahlung zusagen, damit sich der Begebungskurs annähernd auf 100 stellt? (Das Aufgeld ist auf ganze Prozente abzurunden.)

Der Kurs eines 4%igen Papieres, das in 25 Jahren getilgt wird, ist bei $4\frac{1}{2}$% effektiv

$$\frac{14.828209}{15.622080} \times 100 = 94.92.$$

1562^2) 14828 — 9492
768
143
2

Damit aus 94.92 100 wird, muß man es mit

$$\frac{100}{94.92} = 1.0535 = \frac{105.35}{100}$$

multiplizieren.

Probe. $$\frac{94.92 \times 105.35}{100} = 100$$

9492) 10000 — 10535
5080
334
49

9492
53501
94920
4746
285
47
99998

Vergleicht man diese Probe mit Lehrsatz 2 S. 101_1, so sieht man, daß 105.35 der Kurs der 4%igen Anleihe einschließlich des gesuchten Aufgeldes bei 4% effektiv ist. Aus dem Kurse 105.35 oder aus dem Kurszuschlag 5.35 ist das gesuchte Aufgeld zu bestimmen.

*) Die Kurse für ein Aufgeld von 20% sind bei Schinkenberger S. 135 zusammengestellt. (Vgl. Tab. VI.)

Digitized by Google

Der Kurs einer entsprechenden Anleihe mit 100% Aufgeld ist bei 4% effektiv (Ersatzzinsfuß 2%)

$$2 \times \frac{15.622080}{19.523456} \times 100 = 2 \times 80.02 = 160.04.$$

19523⁴) 156221 = 80017
34
14

Dem Kurszuschlag von

60.04 entspricht ein Aufgeld von 100%,

1 „ „ „ „ $\frac{100}{60.04} = 1.65$,

5.35 „ „ „ „ $1.65 \times 5.35 = 8.83\%$.

6004) 10000 = 1650
3996
303
3

165 × 535
3210
2675
883

Die Anleihe muß also zu 109 rückzahlbar sein.

Probe. Dem Aufgeld von 9% entspricht bei 4% effektiv ein Kurszuschlag von

$$9 \times 0.600 = 5.40.$$

Der Kurs der Anleihe mit Aufgeld ist daher bei 4% effektiv 105.40 und bei $4\frac{1}{2}$% effektiv

$$\frac{94.92 \times 105.40}{100} = 100.05.$$

9492
4501
94920
4746
380
100046

Digitized by Google

8. Rentabilität*).

a) Rentabilität von Konsols.

Aufgabe 1. Der Kurs von 3%igen Konsols mit ganzjährlicher Zinszahlung sei 78.50. Welche Rentabilität gewähren sie?

1. Ein Stück von nominell M 1000.— gewährt am Ende des Jahres einen Zinsgewinn von M 30.—. Demjenigen, der das Stück für M 785.— gekauft hat, gewährt es daher eine jährliche Rentabilität von

$$\frac{30}{785} \times 100 = 3.822\,\%.$$

$$\begin{array}{r} 785)\ 3000 = 3822 \\ 6450 \\ 170 \\ 13 \end{array}$$

2. Zuweilen ist es bequemer, die Rentabilität durch Interpolation zu ermitteln. Man würde in diesem Fall folgendermaßen verfahren:

Die gesuchte Rentabilität liegt zwischen $3\frac{3}{4}$ und 4%. Es entspricht aber einem

	effekt. Zinsfuß von	ein Kurs von	
0.25	$3\frac{3}{4}\,\%$	$\frac{300}{3.75} = 80$	5
	4 %	$\frac{300}{4} = 75$	

$$5 \left| \begin{array}{l} 80 \\ 78.50 \\ 75 \end{array} \right. \begin{array}{l} \Big) 1.50 \\ \Big) 3.50 \end{array}$$

Einer Änderung des Kurses um 5 entspricht eine Änderung der Rentabilität um 0.25%; einer Änderung des Kurses um 1.50 daher eine solche der Rentabilität um

$$\frac{0.25 \times 1.50}{5} = 0.075\,\%.$$

Die Rentabilität stellt sich daher auf

*) des Autors: Die Rentabilität auslosbarer Papiere. Zeitschr. f. handelsw. Forschung Bd. V, S. 634.

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 3.75\ \% \\ +\ 0.075\ \% \\ \hline 3.825\ \%. \end{array}$$

Je enger man die Grenzen nimmt, um so genauer wird das Resultat. Es entspricht z. B.

	einem effekt. Zinsfuß von	ein Kurs von	
0.125	$3\,^3/_4$	$\frac{300}{3.75} = 80.0$	2.6
	$3\,^7/_8$	$\frac{300}{3.875} = 77.4$	

$$2.6 \left| \begin{array}{l} 80.00 \\ 78.50 \\ \downarrow 77.40 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ 1.50 \\ 1.10 \end{array}$$

Einer Änderung des Kurses um 2.6 entspricht eine Änderung der Rentabilität um 0.125 %, einer Änderung des Kurses um 1.5 daher eine solche der Rentabilität um

$$\frac{0.125 \times 1.5}{2.6} = 0.072\ \%.$$

Die Rentabilität stellt sich daher auf

$$\begin{array}{r} 3.75 \\ +\ 0.072 \\ \hline 3.822 \end{array} \quad \text{(wie sub 1.)}.$$

Aufgabe 2. Welche halbjährliche und welche ganzjährliche Rentabilität gewährt eine 3 %ige Rente mit halbjährlicher Zinszahlung bei einem Kurse von 78.50?

1. Die halbjährliche Rentabilität berechnet sich zu

$$\frac{1.5 \times 100}{78.50} = 1.911\ \%.$$

$$\begin{array}{rl} 795) & 1500 = 1911 \\ & 7150 \\ & 85 \\ & 6 \end{array}$$

2. Die ganzjährliche Rentabilität kann aus der halbjährlichen nur berechnet werden, wenn man weiß, mit welchem Nutzen die am Ende des ersten Halbjahres fälligen Zinsen verwertet werden können (vgl. S. 38). Kann man dieselben z. B. 2 %ig anlegen, so laufen sie in $^1/_2$ Jahr an zu

$$\begin{array}{rl} & 1.911 \\ +\ 2\ \% \mid 180\ \text{Tage} & \underline{0.019} \\ & 1.930, \end{array}$$

Digitized by Google

und die Rentabilität stellt sich auf

$$\begin{array}{r} 1.930\,\% \\ +\ 1.911\,\% \\ \hline 3.841\,\%. \end{array}$$

Kann man aber die Zinsen 3.822%ig anlegen, z. B. durch Zukauf von neuen Stücken, so laufen sie in $^1/_2$ Jahre an zu

$$\begin{array}{rr} & 1.911 \\ +\ 3.822\,\% \,/\, 180 \text{ Tage} & \underline{0.037} \\ & 1.948, \end{array}$$

und die Rentabilität stellt sich auf

$$\begin{array}{r} 1.948\,\% \\ +\ 1.911\,\% \\ \hline 3.859\,\%. \end{array}$$

Die Rentabilität hängt also in diesem Falle auch davon ab, wie die im ersten Halbjahr fälligen Zinsen verwertet werden können.

b) Rentabilität von Anleihen, die bei gleichmäßiger Annuität verzinst und getilgt werden.

Aufgabe 1. Der Kurs einer $3\,^1/_2\,\%$igen Anleihe, die in 4 Jahren vollständig getilgt sein wird, sei 98.82. Welche Rentabilität gewährt sie?

Es war (S. 92) gezeigt worden, daß der Kurs einer solchen Anleihe berechnet wird als Quotient zweier Renten-Abzinsungsfaktoren. Bei einer effektiven Verzinsung von 4% würde sich z. B. der Kurs obiger Anleihe berechnen zu

$$\frac{3.629895}{3.673079} \times 100 = 98.82$$

$$3673^{1}) \quad 36299 = 9882$$
$$3241$$
$$302$$
$$8$$

Dem 4%igen Renten-Abzinsungsfaktor 3.629895 entspricht also bei vorliegender Anleihe ein Kurs von 98.82. Umgekehrt entspricht einem gegebenen Kurs von 98.82 ein Renten-Abzinsungsfaktor von

$$\frac{98.82}{100} \times 3.673079 = 3.629895$$

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 36731 \\ 2889 \\ \hline 33058 \\ 2939 \\ 294 \\ 7 \\ \hline 36298 \end{array}$$

3.629895 ist aber der 4. Renten-Abzinsungsfaktor der 4%igen Tabelle. Dem Kurse 98.82 entspricht also eine Rentabilität von 4%.

Aufgabe 2. Wie hoch stellt sich die Rentabilität der obigen Anleihe bei einem Kurse von 97.67?

Der Kurs würde sich aus der Gleichung

$$\frac{\square}{3.673079} \times 100 = 97.67$$

berechnen. Umgekehrt bestimmt sich der der gesuchten Rentabilität entsprechende Renten-Abzinsungsfaktor zu

$$\frac{97.67}{100} \times 3.673079 = \boxed{3.5874}$$

$$\begin{array}{r} 3673 \\ 7679 \\ \hline 33058 \\ 2571 \\ 220 \\ 25 \\ \hline 35874 \end{array}$$

Dieses ist mit hinreichender Genauigkeit der 4. Renten-Abzinsungsfaktor der $4\frac{1}{2}$%igen Tabelle. Dem Kurse von 97.67 entspricht also eine Rentabilität von $4\frac{1}{2}$%.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Rechnung, wenn der dem Kurse entsprechende Rentenabzinsungsfaktor nicht in der Tabelle enthalten ist. Die Rentabilität muß dann durch Interpolation ermittelt werden.

Aufgabe 3. Wie hoch stellt sich die Rentabilität der obigen Anleihe bei einem Kurse von 99.00?

1. Der der gesuchten Rentabilität entsprechende 4. Renten-Abzinsungsfaktor ist

$$\frac{99.00}{100} \times 3.673079 = 3.6364.$$

$$\begin{array}{r} 36731 \\ \div\ 367 \\ \hline 36364 \end{array}$$

Digitized by Google

Es entspricht aber

einer Rentabilität von	ein Renten-Abzinsungsfaktor von	
4 %	3.6299	0.0432
$3\frac{1}{2}$ %	3.6731	

$$\left.\begin{array}{l} 3.6299 \\ 3.6364 \\ 3.6731 \end{array}\right\} 0.0065$$

Einer Änderung des Renten-Abzinsungsfaktors um 0.0432 entspricht eine Änderung der Rentabilität um 0.5 %, mithin eine Änderung des Renten-Abzinsungsfaktors um 0.0065 eine solche der Rentabilität von

$$\frac{0.5 \times 0.0065}{0.0432} = 0.075\,\%.$$

$$43^{2)}\quad 325 = 75$$
$$22$$

Die Rentabilität stellt sich daher auf

$$\begin{array}{r} 4.000\,\%. \\ \div\ 0.075\,\% \\ \hline 3.925\,\% \end{array}$$

2. Steht eine Kurstabelle zur Verfügung, so kann man etwas bequemer zum Ziel gelangen.

Bei $3\frac{1}{2}$ %iger effektiver Verzinsung stellt sich der Kurs obiger $3\frac{1}{2}$ %iger Anleihe auf 100, während er bei 4 %iger effektiver Verzinsung auf 98.82 sinkt.

Rentabilität		Kurs	
0.5	$3\frac{1}{2}$	100	1.18
	4	98.82	

$$\left.\begin{array}{l} 100 \\ 99 \\ 98.82 \end{array}\right\} 1$$

Der Änderung des Kurses um 1 entspricht daher eine Änderung der Rentabilität um

$$\frac{0.5 \times 1}{1.18} = 0.424\,\%.$$

$$118)\quad 500 = 424$$
$$28$$
$$4$$

Dem Kurse von 99 entspricht daher eine Rentabilität von

$$\begin{array}{r} 3.500\,\% \\ +\ 0.424\,\% \\ \hline 3.924\,\%. \end{array}$$

Digitized by Google

Nimmt man die Grenzen enger, so wird auch das Resultat genauer. Für die effektiven Zinsfüße $3\,^7/_8$ und 4 erhält man die Kurse 99.12, bzw. 98.82.

Rentabilität		Kurs	
0.125	$3\,^7/_8\,\%$	99.12	0.30
	$4\,\%$	98.82	

99.12 / 99 / 98.82) 0.12

Der Änderung des Kurses um 0.12 entspricht eine solche der Rentabilität um

$$\frac{0.125 \times 0.12}{0.30} = 0.050.$$

Die gesuchte Rentabilität ist daher

$$\begin{array}{r} 3.875\,\% \\ +\,0.050\,\% \\ \hline 3.925\,\% \end{array}$$ (wie sub 1.).

c) Erklärung der Rentabilität.

Aufgabe. Der Kurs einer 4 %igen in 4 Jahren tilgbaren Anleihe sei 98.83, was einer Rentabilität von $4\,^1/_2\,\%$ entspricht. Die Rentabilität soll im einzelnen nachgewiesen werden.

Ist der Betrag der Anleihe z. B. M 1 000 000.—, eingeteilt in 10000 Stücke à M 100.—, so ergibt sich folgender Tilgungsplan.

Anzahl der auszulosenden Stücke	Zu verzinsendes Kapital	Zinsen	Tilgungsquote	Annuität
2355	1 000 000	40 000	235 500	275 500
2449	764 500	30 580	244 900	275 480
2547	519 600	20 784	254 700	275 484
2649	264 900	10 596	264 900	275 496

Der Kurs dieser Anleihe würde sich bei $4\,^1/_2\,\%$iger effektiver Verzinsung

zu Anfang des 1. Jahres auf 98.83
„ „ „ 2. „ „ 99.06
„ „ „ 3. „ „ 99.29
„ „ „ 4. „ „ 99.52

stellen.

Angenommen, es hätte jemand die ganze Anleihe zum Kurse von 98.83 übernommen, so würde er M 988 300.— investiert haben.

Digitized by Google

Am Ende des 1. Jahres erhält er an

Zinsen M 40000.—.

Würde man die Rentabilität wie oben S. 106 berechnen, so erhielte man

$$\frac{40000 \times 100}{988300} = 4.047\,\%,$$

während dem Kurse von 98.83 eine Rentabilität von $4^1/_2\,\%$ entsprechen soll.

Diese Rentabilität ergibt sich erst, wenn man die folgenden beiden Umstände berücksichtigt.

1. Von den 10000 Stücken, die zu Anfang des Jahres mit 98.83 gekauft worden sind, werden am Ende des Jahres 2355 Stücke mit 100 zurückgezahlt, so daß sich ein

Auslosungsgewinn von $2355 \times$ M 1.17 = M 2755.35

ergibt.

2. Der Kurs der Anleihe stellt sich zu Anfang des 2. Jahres bei $4^1/_2\,\%$iger effektiver Verzinsung auf 99.06, so daß sich an den 7645 nicht ausgelosten Stücken ein

Kursgewinn von $7645 \times$ M 0.23 = M 1758.35

ergibt.

Der Nutzen aus dem Papier setzt sich also zusammen aus:

Zinsen	M 40000.—
Auslosungsgewinn	„ 2755.35
Kursgewinn	„ 1758.35
	M 44513.70.

Da ein Kapital von M 988300.— angelegt worden ist, so ergibt sich die Rentabilität

$$\frac{44513.70}{988300} = 4.504\,\%.$$

(Die kleine Abweichung erklärt sich aus der Abrundung der Kurse auf ganze Pfennige.)

Zu Anfang des 2. Jahres stellt sich das investierte Kapital auf

$$7645 \times \text{M } 99.06 = \text{M } 757313.70.$$

Die Zinsen betragen		M 30580.—,
der Auslosungsgewinn	$2449 \times$ M 0.94 =	„ 2302.06
und der Kursgewinn	$5196 \times$ M 0.23 =	„ 1195.08
		Sa. M 34077.14.

Digitized by Google

Die Rentabilität stellt sich daher auf

$$\frac{34077.14}{757313.70} = 4.5\,\%.$$

Zu beachten ist, daß bei der Berechnung der Rentabilität eines solchen Papiers ein Kursgewinn berücksichtigt werden muß. Dieser Kursgewinn aber hat einen eigentümlichen Charakter. Bei einem Rentenpapier (Konsol) zeigt eine Erhöhung des Kurses an, daß entweder die Nachfrage in diesem Papier sich vergrößert, oder daß der Zinsfuß am Markte gesunken ist. Die Erhöhung ist also durch äußere Umstände bedingt. Bei unserer Anleihe ist aber die Kurserhöhung nicht durch äußere Umstände bedingt; die effektive Verzinsung ist bei jedem der 4 oben angegebenen Kurse eine $4\frac{1}{2}\,\%$ige. Die Erhöhung liegt also in dem Charakter des Papiers selber; sie ist bedingt durch ein Steigen des inneren Wertes. Es handelt sich nicht um einen Konjunkturgewinn, ein Umstand, der bei der Bewertung solcher Papiere mit berücksichtigt werden sollte.

Daß bei Papieren, die über Pari stehen, statt des Auslosungsgewinnes ein Auslosungsverlust und statt des Kursgewinnes ein Kursverlust, Fallen des inneren Wertes, eintritt, braucht nicht näher ausgeführt zu werden.

Bislang war nur die Rentabilität der gesamten Anleihen betrachtet worden. Bei dem einzelnen Stück liegen die Verhältnisse etwas anders. Da man zu Anfang des Jahres nicht weiß, ob ein bestimmtes Stück ausgelost wird oder nicht, so ergeben sich zwei Möglichkeiten:

1. Das Stück wird am Ende des Jahres gezogen; dann ergibt sich der Nutzen:

Zinsen	4.—
Auslosungsgewinn	1.17
	5.17;

$$\text{Rentabilität } \frac{5.17}{98.83} = 5.231\,\%.$$

2. Das Stück wird nicht gezogen; dann ergibt sich als Nutzen:

Zinsen	4.—
Kursgewinn	0.23
	4.23;

$$\text{Rentabilität } \frac{4.23}{98.83} = 4.280\,\%.$$

Der Kurs eines Papiers wird bestimmt durch die Wahrscheinlichkeit,

Digitized by Google

mit der eine Rentabilität von 5.231 oder eine solche von 4.280 zu erwarten ist, oder, was dasselbe ist, durch die mittlere Rentabilität. Diese ist

$$\begin{aligned} 2355 \times 5.231 &= 12319 \\ 7645 \times 4.280 &= 32721 \\ \hline 10000 \quad \text{in} \quad & 45040 \end{aligned}$$

$$= 4.504 \text{ (wie oben).}$$

Im 2. Jahre ergeben sich für das einzelne Stück folgende Rentabilitäten.

1. Das Stück wird am Ende des Jahres gezogen; dann ist der Nutzen:

Zinsen	4.—
Auslosungsgewinn	0.94
	4.94;

$$\text{Rentabilität } \frac{4.94}{99.06} = 4.987\,\%.$$

2. Das Stück wird nicht gezogen; dann ist der Nutzen:

Zinsen	4.—
Kursgewinn	0.23
	4.23;

$$\text{Rentabilität } \frac{4.23}{99.06} = 4.270\,\%.$$

Die mittlere Rentabilität berechnet sich zu

$$\begin{aligned} 2449 \times 4.987 &= 12213 \\ 5196 \times 4.270 &= 22187 \\ \hline 7645 \quad \text{in} \quad & 34400 \end{aligned}$$

$$= 4.500\,\%.$$

Im 3. Jahre ergibt sich,

falls das Stück gezogen wird, die Rentabilität von 4.744 %,
„ „ „ nicht gezogen wird, die Rentabilität von 4.260 %,

im Mittel:

$$\begin{aligned} 2547 \times 4.744 &= 12083 \\ 2649 \times 4.260 &= 11285 \\ \hline 5196 \quad \text{in} \quad & 23368 \end{aligned}$$

$$= 4.497\,\%.$$

Im 4. Jahre werden alle Stücke gezogen, so daß sich nur ein Wert für die Rentabilität ergibt. Der Nutzen ist bei allen Stücken:

Digitized by Google

Zinsen	4.—
Auslosungsgewinn	0.48
	4.48;

$$\text{Rentabilität } \frac{4.48}{99.52} = 4.502\,\%.$$

In tabellarischer Übersicht ergibt sich:

Jahr	Kurs	Rentabilität		
		eines gezogenen Stückes	eines nicht gezogenen Stückes	im Mittel
1	98.83	5.231 %	4.280 %	4.504 %
2	99.06	4.987 %	4.270 %	4.500 %
3	99.29	4.744 %	4.260 %	4.497 %
4	99.52	4.502 %	—	4.502 %

Im Mittel bleibt die Rentabilität konstant 4.5 %. Die wirkliche Rentabilität dagegen sowohl der gezogenen als auch der nicht gezogenen Stücke nimmt jährlich ab. Trotzdem steigt der Kurs fortgesetzt, was sich daraus erklärt, daß die Anzahl der auszulosenden Stücke jährlich zunimmt, während auf der anderen Seite die Zahl der zurückbleibenden Stücke abnimmt. Damit wächst aber in doppelter Weise die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Stückes, am Ende des Jahres ausgelost und damit der höheren Rentabilität teilhaftig zu werden.

Drückt man die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, aus durch das Verhältnis der Anzahl der gezogenen Stücke zur Anzahl der Stücke, aus der gezogen wird, so ergibt sich für

das Jahr	die Wahrscheinlichkeit	
	gezogen zu werden	nicht gezogen zu werden
1	$\frac{2355}{10000} = 0.236_{55}$	$\frac{7645}{10000} = 0.764$
2	$\frac{2449}{7645} = 0.320_{08}$	$\frac{5196}{7645} = 0.680$
3	$\frac{2547}{5196} = 0.490_{02}$	$\frac{2649}{5196} = 0.510$
4	$\frac{2649}{2649} = 1.000$	$\frac{0}{2649} = 0.$

Digitized by Google

Bewertet man einen Auslosungsgewinn von 1.17, den man mit der Wahrscheinlichkeit 0.236 erzielen wird, mit

$$1.17 \times 0.236 = 0.276$$

und einen Kursgewinn von 0.23, den man mit der Wahrscheinlichkeit von 0.764 erzielen wird, mit

$$0.23 \times 0.764 = 0.176,$$

so setzt sich der Gesamtnutzen, den ein einzelnes Stück gewährt, zusammen aus:

Zinsen	4.—
Wahrscheinlichkeitswert des Auslosungsgewinns	0.276
„ „ Kursgewinns	0.176
Sa.	4.452,

und man erhält als Wert der wahrscheinlichen (oder mittleren) Rentabilität

$$\frac{4.452}{98.83} = 4.504\,\% \text{ (wie oben).}$$

Führt man die Rechnung auch für die folgenden Jahre aus, so erhält man folgende Tabelle.

Jahr	Kurs	Wahrscheinlichkeitswert des Auslosungsgewinns	Wahrscheinlichkeitswert des Kursgewinns	Sa.	Sa. zuzügl. 4% Zinsen	Wahrscheinl. Rentabilität
1	98.83	$1.17 \times 0.236 = 0.276$	$0.23 \times 0.764 = 0.176$	0.452	4.452	4.50%
2	99.06	$0.94 \times 0.320 = 0.301$	$0.23 \times 0.680 = 0.157$	0.458	4.458	4.50%
3	99.29	$0.71 \times 0.490 = 0.348$	$0.23 \times 0.510 = 0.117$	0.465	4.465	4.50%
4	99.52	$0.48 \times 1.000 = 0.480$	$0.23 \times 0.000 = 0.000$	0.480	4.480	4.50%

Bei auslosbaren Papieren bestimmt sich also der Kurs nach einer wahrscheinlichen Rentabilität, die allerdings der wirklichen Rentabilität sowohl eines gezogenen, wie eines nicht gezogenen Stückes um so näher kommt, je weniger der Kurs von der Parität abweicht.

Digitized by Google

9. Anleihen, die nach einem festen Prozentsatz des Kapitalrestes getilgt werden.

Im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, daß der Kurs eines auslosbaren Papiers außer vom nominellen und vom effektiven Zinsfuß auch von der Wahrscheinlichkeit abhängt, mit der eine Auslosung zu erwarten ist. Nimmt bei derselben Anleihe und bei gleichbleibendem effektiven Zinsfuß diese Auslosungswahrscheinlichkeit von Jahr zu Jahr zu, so tritt eine jährliche Steigerung des Kurses ein, wenn das Papier unter Pari, dagegen ein jährliches Fallen des Kurses, wenn das Papier über Pari steht. Es war aber oben (S. 94) gezeigt worden, daß diese Unstätigkeit des Kurses auf die Marktfähigkeit des Papiers ungünstig einwirkt. Dieser Übelstand kann vermieden werden, wenn die Auslosungswahrscheinlichkeit während der ganzen Dauer der Anleihe konstant bleibt, d. h. wenn immer ein gleicher Prozentsatz der noch umlaufenden Stücke (des Restkapitals) gezogen wird*). Für eine solche Anleihe mögen noch die rechnerischen Grundlagen gegeben werden.

Aufgabe. Eine Anleihe von M 1000000.— soll jährlich mit 4% verzinst und mit 2% vom Kapitalrest getilgt werden. Es ist der Tilgungsplan aufzustellen und der Kurs für eine $4\frac{1}{2}$%ige effektive Verzinsung zu berechnen, wobei von der Stückelung abgesehen werden möge.

1. Durch sukzessive Subtraktion von 2% des Schuldrestes ergibt sich folgender Tilgungsplan

	Kapital	Zinsen	Tilgungsquote	Annuität
0	1000000	40000	20000	60000
1	980000	39200	19600	58800
2	960400	38416	19208	57624

Man beachte, daß die Kapitalreste dargestellt werden durch die mit 1000000 multiplizierten Abzinsungsfaktoren der antizipativen 2%igen Verzinsung**)

*) Schmalenbach: l. c.

**) Dieselben Faktoren, die auch bei Berechnung von Abschreibungsquoten benutzt worden sind (S. 60).

Digitized by Google

0	1
1	0.98
2	0.9604
3	0.941192

usw.

Der Kapitalrest nach z. B. 20 Jahren oder zu Anfang des 21. Jahres ist daher

20. M 667608.—,

und es ergibt sich für

Kapital	Zinsen	Tilgungsquote	Annuität
667808.—	26704.32	13352.16	40056.48.

Der Tilgungsplan einer solchen Anleihe läßt sich also aus einer Tafel der antizipativen Abzinsungsfaktoren einfach abschreiben.

Aus der Art der Tilgung ergibt sich von selbst, daß die Anleihe niemals vollständig getilgt wird. Dies ist aber kein großer Nachteil, da ein Rest einer alten Anleihe ohne weiteres in eine neue Anleihe von gleichem Zinsfuß und gleicher Tilgung aufgenommen werden kann.

2. Es fragt sich, welches der Barwert der Annuitäten bei einer effektiven Verzinsung von $4\frac{1}{2}\%$ ist?

Da bei dieser Anleihe der Kurs bei gleichbleibender effektiver Verzinsung von Jahr zu Jahr konstant bleibt, so setzt sich die effektive Verzinsung zusammen aus den Zinsen des Tilgungsplans und dem Auslosungsgewinn.

Die Zinsen betragen auf je 100 Stücke M 400.—. Ist K der gezahlte Kurs, so ist der Auslosungsgewinn an einem mit 100 ausgelosten Stück

$$100 - K,$$

und da von 100 Stücken 2 ausgelost werden, so ist der Auslosungsgewinn auf 100 Stück

$$(100 - K) \times 2.$$

Die effektive Verzinsung von 100 Stücken ist dargestellt durch

$$100 \times K \times 0.045 = K\,4.5.$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} K \times 4.5 &= 400 + (100 - K) \times 2 \\ &= 400 + 200 - 2K \\ K \times 6.5 &= 600 \\ K &= \frac{6}{6.5} \times 100 \\ K &= 92.30^8. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Einfacher erhält man den Kurswert durch folgende Überlegung: Bei 4 %iger Verzinsung verlangt der Gläubiger für je M 100.— jährlich

$$M\ 4.— + M\ 2.— = M\ 6.—,$$

bei $4\frac{1}{2}$ %iger auf je M 100.—

$$M\ 4.50 + M\ 2.— = M\ 6.50.$$

Da er aber für M 100.— nominell nur M 6.— erhält, so wird er dafür effektiv nur

$$\frac{M\ 6.—}{6.50} \times 100 = M\ 92.30^8$$

zahlen.

Probe. Zum Kurse von 92.30^8 ist der Preis für 10000 Stücke M 923080.—. Der Auslosungsgewinn ist an 200 ausgelosten Stücken

$$200 \times M\ 7.69^2 = M\ 1538.40.$$

Die Zinsen belaufen sich auf M 40000.—. Das Gesamterträgnis ist also

$$M\ 41538.40.$$

Die Rentabilität stellt sich daher auf

$$\frac{41538.40}{923080.—} = 4.500\ \%.$$

Für das 2. Jahr erhält man als Anlagekapital

$$9800 \times M\ 92.30^8 = M\ 904618.40.$$

Die Zinsen betragen M 39200.—
und der Auslosungsgewinn
$196 \times M\ 7.692$ = „ 1507.63
Sa. M 40707.63.

Die Rentabilität stellt sich auf

$$\frac{40707.63}{904618.40} = 4.500\ \%.$$

Bei der Berechnung der Rentabilität des einzelnen Stückes muß man wieder unterscheiden zwischen solchen, die am Ende des Jahres gezogen, und solchen, die nicht gezogen werden.

1. Das Stück wird gezogen.

Der Nutzen ist:

Zinsen	4.—
Auslosungsgewinn	7.692
	Sa. 11.692;

Digitized by Google

$$\text{Rentabilität } \frac{11.692}{92.308} = 12.666\,\%.$$

2. Das Stück wird nicht gezogen.

Der Nutzen ist:

$$\text{Zinsen} \qquad 4.—;$$

$$\text{Rentabilität } \frac{4}{92.308} = 4.334\,\%.$$

Die mittlere Rentabilität berechnet sich zu

$$\begin{aligned} 2 \times 12.666 &= 25.332 \\ \frac{98}{100} \times 4.334 &= \underline{424.732} \\ \text{in} \qquad & 450.064 \\ = 4.500\,\%. & \end{aligned}$$

In den folgenden beiden Tabellen sind die Kurse einer 4%igen und einer $3\frac{1}{2}$%igen Anleihe dieses Typs für verschiedene Tilgungsquoten und bei Annahme einer $3\frac{7}{8}$%igen effektiven Verzinsung zusammengestellt. Außerdem ist in den Tabellen angegeben, welche Tilgungszeiten den Kursen bei einer Anleihe entsprechen würden, die bei gleichmäßiger Annuität getilgt wird. Endlich sind noch die Erfordernisse beider Anleihetypen in dem 1. Jahre gegenübergestellt. (I. Tilgung bei gleichmäßiger Annuität. II. Tilgung nach einem festen Prozentsatz vom Kapitalrest.)

Tabelle I.

Zinsfuß nominell 4%, effektiv $3\frac{7}{8}$%.

a. Tilgungsquote vom Kapitalrest	b. Kurs	c. Tilgungszeit bei gleichmäßiger Annuität in Jahren	d. Erfordernis d. 1. Jahres für M 1 000 000.— I	d. II	e. Kapitalrest nach der sub c angegebenen Anzahl von Jahren
2%	$\frac{6}{5\frac{7}{8}} = 102.15$	49	48 262.46	60 000.—	371 602.—
3%	$\frac{7}{6\frac{7}{8}} = 101.82$	38	51 631.92	70 000.—	314 287.—
4%	$\frac{8}{7\frac{7}{8}} = 101.59$	32	55 948.59	80 000.—	270 819.—
5%	$\frac{9}{8\frac{7}{8}} = 101.41$	27	61 238.54	90 000.—	250 344.—
6%	$\frac{10}{9\frac{7}{8}} = 101.27$	24	65 586.83	100 000.—	226 500.—

Digitized by Google

Tabelle II.

Zinsfuß nominell $3\frac{1}{2}\%$, effektiv $3\frac{7}{8}\%$.

a. Tilgungsquote vom Kapitalrest	b. Kurs	c. Tilgungszeit bei gleichmäßiger Annuität in Jahren	d. Erfordernis d. 1. Jahres für M 1 000 000.— I	d. II	e. Kapitalrest nach der sub c angegebenen Anzahl von Jahren
2%	$\frac{5\frac{1}{2}}{5\frac{7}{8}} = 93.62$	49	42961.67	55000.—	371602.—
3%	$\frac{6\frac{1}{2}}{6\frac{7}{8}} = 94.55$	39	47387.75	65000.—	304858.—
4%	$\frac{7\frac{1}{2}}{7\frac{7}{8}} = 95.24$	32	52441.50	75000.—	270819.—
5%	$\frac{8\frac{1}{2}}{8\frac{7}{8}} = 95.77$	27	57852.24	85000.—	250344.—
6%	$\frac{9\frac{1}{2}}{9\frac{7}{8}} = 96.20$	24	62272.83	95000.—	226500.—

Bei nominellem Zinsfuß von 4% und einem effektiven Zinsfuß von $3\frac{7}{8}\%$ stehen also z. B. eine Anleihe, die in 38 Jahren bei gleichmäßiger Annuität, und eine solche, die mit 3% vom Anleiherest getilgt wird, in Parität.

Vom Standpunkt des Anleihenehmers (der Gemeinde) ist zu berücksichtigen, daß eine Anleihe des 2. Typs in den ersten Jahren erheblich größere Beträge erfordert, und daß zu der Zeit, wo die Anleihe des 1. Typs schon gänzlich getilgt ist, von der des 2. Typs noch ziemlich $\frac{1}{8}$ übrig ist.

Digitized by Google

10. Bewertung von Obligationen in der Bilanz.

a) Disagio bei Anleihen, die al pari rückzahlbar sind.

Aus den Ausführungen der Abschnitte 8 b und c über die Rentabilität muß noch eine weitere wichtige Folgerung gezogen werden.

Angenommen, ein Unternehmen habe eine 4 % ige in 4 Jahren tilgbare Anleihe von M 1000000.— aufgenommen, und eine Bank hätte dieselbe netto zum Kurse 98.83 übernommen. In diesem Falle würde die Bank, wie ausführlich auseinandergesetzt wurde, aus ihrer Anlage dauernd eine $4\frac{1}{2}$ % ige Verzinsung erzielen. Umgekehrt muß man zugeben, daß dem Unternehmen durch die Anleihe eine $4\frac{1}{2}$ % ige Belastung erwächst. Unberechtigt scheint jedenfalls die Auffassung, daß das Unternehmen zunächst einen Verlust von M 11700.— erlitte, weil es für die Anleihe von nominell M 1000000.— nur M 988300.— erhält, dafür aber in den folgenden Jahren nur eine Zinslast von 4 % zu tragen hätte. Die Aufwendung von M 11700.— ist für die ganze Anleihe gemacht worden, um den Obligationen, resp. der Emissionsbank eine höhere Verzinsung zu gewähren; es wäre daher unbillig, sie voll dem Emissionsjahre zu belasten. Vielmehr muß die Aufwendung von M 11700.— so auf die einzelnen Jahre verteilt werden, daß die Belastung einschließlich der 4 % Zinsen stets $4\frac{1}{2}$ % der Restschuld ausmacht, was möglich sein muß, da ja das Papier beim Emissionskurs von 98.83 dauernd eine Rentabilität von $4\frac{1}{2}$ % gewährt.

Nun ist es üblich, die Obligationen, wenn sie al pari rückzahlbar sind, zum Nennwert in die Passiva der Bilanz einzusetzen und den Ausgleich durch einen Aktivposten (Disagio) zu schaffen.

Aktiva		Passiva	
Disagio	M 11700.—	Obligationen	M 1000000.—.

Es wird damit dasselbe erreicht, als wenn die Schuld nur mit M 988300.— eingesetzt wäre. Dieser Aktivposten muß abgeschrieben werden, wodurch eine Belastung entsteht, und es fragt sich nur, in

Digitized by Google

welcher Weise abgeschrieben werden muß, so daß die aus den Obligationen sich ergebende Gesamtlast dauernd $4\frac{1}{2}\%$ bleibt.

Es war gezeigt worden, daß die Gesamtrentabilität sich zusammensetzt aus

Zinsen,
Auslosungsgewinn
und Kursgewinn (Steigen des inneren Wertes).

Dementsprechend muß sich die Gesamtbelastung zusammensetzen aus

Zinsen,
Auslosungsverlust
und Steigen des inneren Wertes.

Sieht man für den Augenblick von obiger Buchung ab, und setzt man nur den Kurswert in die Bilanz ein, so erhält man

Aktiva	Passiva
	Obligationen M 1 000 000.— à 98.83 M 988 300.—.

Für diese sind am Ende des Jahres an 4% Zinsen M 40000.— zu zahlen. Ferner entsteht an 2355 Stücken
ein Auslosungsverlust von M 1.17 × 2355 = „ 2755.35
Sa. M 42755.35.

Das wäre auf eine Schuld von M 988300.— nur eine Belastung von

$$\frac{42755.35}{988300.—} = 4.326\,\%.$$

9883) 42755 = 4326
3223
258
60

Eine weitere Belastung entsteht dadurch, daß die restierenden 7645 Stücke nicht mehr zu 98.83, sondern zu 99.06 in die Bilanz einzusetzen sind. Diese Belastung beläuft sich auf

7645 × M 0.23 = M 1758.35.

Dadurch entsteht eine Gesamtbelastung von „ 44513.70
oder, auf eine Schuld von M 988300.— bezogen, von

$$\frac{44513.70}{988300.—} = 4.504\,\%$$ (vgl. S. 112).

Digitized by Google

Aus den Ausführungen auf S. 111ff. folgt ohne weiteres, daß die Obligationen der Reihe nach einzusetzen sind zum Kurse von

98.83
99.06
99.29
99.52,

d. h. mit folgenden effektiven Beträgen:

	Nominell	Kurs	Effektiv
1	1000000.—	98.83	988300.—
2	764500.—	99.06	757313.70
3	519600.—	99.29	515910.84
4	264900.—	99.52	263628.48
Sa.	2549000.—		2525153.02.

Durch diese Kurssteigerung entstehen Verluste von

1 $7645 \times 0.23 = 1758.35$
2 $5196 \times 0.23 = 1195.08$
3 $2649 \times 0.23 = 609.27$
4 0 0 .

Ferner betragen die Auslosungsverluste

1 $2355 \times 1.17 = 2755.35$
2 $2449 \times 0.94 = 2302.06$
3 $2547 \times 0.71 = 1808.37$
4 $2649 \times 0.48 = 1271.52.$

Die Gesamtbelastungen sind also

	1. Zinsen	2. Auslosungsverlust	3. Steigen d. inneren Wertes	4. Summe von 2 u. 3	5. Summe von 1 u. 4	6. Kurswert bei $4^1/_2$ % effektiv	7. Prozent. *) Belastung
1	40000.—	2755.35	1758.35	4513.70	44513.70	988300.—	4.504
2	30580.—	2302.06	1195.08	3497.14	34077.14	757313.70	4.500
3	20784.—	1808.37	609.27	2417.64	23201.64	515910.84	4.497
4	10596.—	1271.52	0	1271.52	11867.52	263628.48	4.502
Sa.	101960.—	8137.30	3562.70	11700.—	113660.—	2525153.02	4.501

*) Da die Kurse nur auf ganze Pfennige genau berechnet sind, so kann man in den Resultaten nur eine Genauigkeit bis auf hundertstel Prozente erwarten. Die Abweichungen in den Tausendsteln sind daher erklärlich.

Digitized by Google

Probe. 4.501 % a/ M 2525153.02 = M 113657.14
+ „ 2.86
M 113660.—

2525153 × 4501
10100612
1262577
2525
11365714

Lehrsatz 1. Soll die aus tilgbaren, unter Pari ausgegebenen Schuldverschreibungen entstehende Belastung fortlaufend den gleichen Prozentsatz der Restschuld ausmachen, so ist die Schuld zu einem jährlich steigenden Kurs in die Bilanz einzusetzen.

Will man, wie üblich, die Schuld zum Nennwert unter die Passiva aufnehmen, so hat man unter die Aktiva einen Bewertungsposten von hinreichender Höhe einzusetzen. Dieser berechnet sich als

Nennwert ÷ Kurswert bei $4\frac{1}{2}$ % effektiv = Disagio

1	1000000.—	÷ 988300.—	=	11700.—
2	764500.—	÷ 757313.70	=	7186.30
3	519600.—	÷ 515910.84	=	3689.16
4	264900.—	÷ 263628.48	=	1271.52,

und man erhält der Reihe nach in der Bilanz

	Aktiva	M	Passiva	M
Anfang 1	Disagio	11700.—	Obligationen	1000000.—
Ende 1	Disagio	7186.30	Obligationen	764500.—
Ende 2	Disagio	3689.16	Obligationen	519600.—
Ende 3	Disagio	1271.52	Obligationen	264900.—
Ende 4	Disagio	0	Obligationen	0.

Demnach sind jährlich folgende Beträge vom Disagio abzuschreiben:

1	4513.70
2	3497.14
3	2417.64
4	1271.52
Sa.	11700.—.

Diese stimmen genau mit den Ziffern in Kolonne 4 der Tabelle S. 124 überein.

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Nimmt man unter Pari ausgegebene Schuldverschreibungen zum Nennwert unter die Passiva auf, so hat man unter Voraussetzung von Lehrsatz 1 unter die Aktiva einen Bewertungsposten (Disagio) einzusetzen, welcher der Differenz zwischen Nennwert und Kurswert der Restschuld gleichkommt.

Lehrsatz 3. Das Disagio ist jährlich abzuschreiben. Die Höhe der Abschreibungsquoten bestimmt sich durch die Summe von Auslosungsverlust und Steigen des inneren Wertes der Schuld.

Soll also korrekt gebucht werden, so muß man bei Aufstellung des Tilgungsplanes außer den Nominalbeträgen der Schuldreste auch deren Effektivbeträge berechnen und aus der Differenz die Höhe des Disagios für jedes Jahr bestimmen.

Dieses genaue Verfahren ist allerdings etwas umständlich, besonders wenn es sich um einen spitzen effektiven Zinsfuß handelt, bei dem man die Kurse nicht ohne weiteres einer Kurstabelle entnehmen kann. Es soll daher ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Disagio-Abschreibung angegeben werden, das für nicht zu große Disagio-Beträge immerhin genügend genaue Resultate liefert*).

Die Gesamtbelastung (Zinsen und Disagio-Abschreibung) ist, auf den jeweiligen Kurswert der Restschuld bezogen, jährlich 4,5%. Bezieht man sie auf den jeweiligen Nennwert der Restschuld, so erhält man folgende prozentuale Belastungen:

$$1 \quad \frac{4.5 \times 98.83}{100} = 4.447\%$$

$$2 \quad \frac{4.5 \times 99.06}{100} = 4.458\%$$

$$3 \quad \frac{4.5 \times 99.29}{100} = 4.468\%$$

$$4 \quad \frac{4.5 \times 99.52}{100} = 4.478\%.$$

9883×45	9906×45	9929×45	9952×45
39532	39624	39716	39808
49415	49530	49645	49760
444735	445770	446805	447840

*) E. Schmalenbach: Die Verbuchung von Teilschuldverschreibungen. Zeitschr. f. handelsw. Forschung. Bd. II, S. 361. — Manfred Berliner: Agio und Disagio bei Anleihen und deren Verbuchung. Zeitschr. f. Handelswissenschaft u. Handelspraxis, 1. Jahrgang (Januar 1909), S. 352.

Digitized by Google

Da von der Gesamtbelastung 4% des Nennwertes auf die Verzinsung entfallen, so hätte man genau genommen der Reihe nach

1 0.447%
2 0.458%
3 0.468%
4 0,478%

des Nennwertes der Restschuld vom Disagio abzuschreiben. Da aber diese Prozentsätze sich nicht sehr stark ändern, so kann man sich in der Regel damit begnügen, jedes Jahr den gleichen Prozentsatz vom Nennwert abzuschreiben. Diesen mittleren Prozentsatz findet man am leichtesten, indem man das Disagio von M 11 700.— durch die Summe von M 2 549 000.— aller Schuldreste (vgl. Tabelle S. 124 oben) dividiert:

$$\frac{11700}{2549000} = 0.459\%.$$

$$2549)\ 11700 = 4590$$
$$1504$$
$$229$$

Berechnet man nach diesem Prozentsatz die Abschreibungsquoten, so erhält man

	1. Nennwert der Restschuld	2. Angenäherter Wert d. Abschreib.-Quote = 0.459% von 1.	3. Genauer Wert der Abschreib.-Quote lt. Tab. S. 125 unten	Differenz
1	1 000 000.—	4590.—	4513.70	+ 76.30
2	764 500.—	3509.06	3497.14	+ 11.92
3	519 600.—	2384.96	2417.64	— 32.68
4	264 900.—	1215.89 +9	1271.52	— 55.54
Sa.	2 549 000.—	11 700.—	11 700.—	0

7645 × 459	5196 × 459	2649 × 459
30580	20784	10596
38225	25980	13245
68805	46764	23841
3509055	2384964	1215891

Lehrsatz 4. Bei der Näherungsrechnung werden die ersten Jahre zum Vorteil der späteren stärker belastet.

In der Regel wird es auf diese Differenz nicht ankommen. Handelt es sich aber um Fälle, bei denen man größere Genauigkeit wünscht, so

Digitized by Google

wird man, jedenfalls bei großem Disagio, auf die exakte Rechnung zurückgreifen müssen.

Nach der Näherungsmethode berechnet sich die prozentuale Gesamtbelastung zu 4% Zinsen + 0.459% Abschreibung, beides bezogen auf den Nennwert der Schuld. Auf den Emissionskurs 98.83 bezogen gibt dies eine Belastung von

$$\frac{4.459}{98.83} = 4.512\%,$$

während sich bei genauer Rechnung 4.501% ergab.

Die Differenz ist im vorliegenden Falle nur klein; bei langer Tilgungsdauer wächst sie jedoch auch prozentual nicht unbeträchtlich an (vgl. unten).

Der Unterschied zwischen den beiden Methoden liegt seinem Wesen nach darin, daß die exakte Methode die jährliche Gesamtbelastung aus Zinsen und Abschreibung bezieht auf das in der Unternehmung tatsächlich arbeitende Obligationen-Kapital, wie es sich als Differenz aus dem Nennwert der Restschuld und dem Rest des Disagios berechnet (vgl. S. 125). Auf dieses bezogen ist dann die prozentuale Gesamtbelastung jährlich 4.5% (vgl. S. 124). Die Näherungsmethode dagegen bezieht die Gesamtbelastung auf den Nennwert, resp. auf den mit dem Emissionskurs 98.83 multiplizierten Nennwert der Restschuld.

	1. Nennwert	2. Nennwert × 98.83%	3. Ges. Belastung n. d. Näherungsmethode	4. Prozentual
1.	1000000.—	988300.—	44590.—	4.512%
2.	764500.—	755555.35	34089.06	4.512%
3.	519600.—	513520.68	23168.96	4.512%
4.	264900.—	261800.67	11811.89	4.512%

Das in der Unternehmung arbeitende Obligationen-Kapital würde aber nur den in der 2. Spalte angegebenen Beträgen entsprechen, wenn man von dem Disagio-Konto nur soviel abschriebe, wie der tatsächlichen Disagio-Auszahlung entspricht. Man schreibt aber in den ersten Jahren mehr ab, in den späteren Jahren weniger. Diese Mehrabschreibung bildet eine Rückstellung, deren aktiver Gegenwert in der Unternehmung mitarbeitet, also dem Restkapital (Spalte 2 der vorigen Tabelle) zuzurechnen ist.

Digitized by Google

	Disagio-Abschreib. n. d. exakten Meth.	Disagio-Auszahl. 1.17 p.St.	Dotierung der Rückstellung	Rückstellung	Nennwert × 98.83%	Gesamtes Restkapital
1.	4513.70	2755.35	+ 1758.35		988300.—	988300.—
2.	3497.14	2865.33	+ 631.81	1758.35	755555.35	757313.70
3.	2417.64	2979.99	— 562.35	2390.61	513520.68	515910.84
4.	1271.52	3099.33	— 1827.81	1827.81	261800.67	263628.48

Die Ziffern der letzten Spalten stimmen mit den Ziffern für das Effektiv-Kapital bei den Kursen 98.83, 99.06, 99.29, 99.52 (vgl. S. 124) überein. Damit ist gezeigt, daß die exakte Methode wirklich das in der Unternehmung arbeitende Obligationen-Kapital der Berechnung der Disagio-Abschreibung zugrunde legt, während die Näherungsmethode die durch stärkere Abschreibung des Disagio-Kontos entstehende Rückstellung unberücksichtigt läßt.

Bei der Berechnung des Disagios entsteht noch eine andere Frage: Ist man — da das Disagio den Ausgleich schaffen soll zwischen Kurswert und Nennwert, da man in Wirklichkeit also zum Kurswert abrechnen will — überhaupt an den effektiven Zinsfuß, der sich bei der Emission ergeben hat, gebunden, oder soll man lieber der Abrechnung den Kurswert zugrunde legen, welcher der augenblicklichen Marktlage entspricht?

Die offene Handelsgesellschaft A & B z. B. habe im Jahre 1910 eine 4%ige bis 1950 tilgbare Anleihe von M 1000000.— aufgenommen. Der Kurs stellte sich damals netto auf 86.69, was einem effektiven Zinsfuß von 5% entspricht. Das Disagio betrug also M 133100.—. Im Jahre 1915 tritt B aus. Die Anleihe ist bis dahin durch Tilgung auf nominell M 943000.— zurückgegangen. Bei einem effektiven Zinsfuß von 5% berechnet sich der Kurs zu 87.73.

Es ist demnach der Kurswert bei 5% effektiv

$$\frac{\text{M } 943000 \times 87.73}{100} = \text{M } 827293.90,$$

und das Disagio steht mit

M 943000.—
÷ „ 827293.90
M 115706.10

zu Buche.

Zur Zeit der Auseinandersetzung ließe sich aber eine bis 1950 tilgbare 4%ige Anleihe zum Kurse von 93.55 beschaffen, d. h. zu einem $4\frac{1}{2}$%igen effektiven Zinsfuß.

Digitized by Google

Demnach ist der Kurswert bei $4^1/_2$% effektiv

$$\frac{\text{M } 943\,000 \times 93.55}{100} = \text{M } 882\,176.50,$$

und das Disagio würde sich nur auf

	M 943 000.—
÷	„ 882 175.50
	M 60 823.50

stellen, so daß eine Differenz von

	M 115 706.10
÷	„ 60 823.50
	M 54 882.60

entsteht, über die sich A und B einigen müßten.

Denkbar ist der Fall, daß der effektive Zinsfuß unter 4% gesunken ist, so daß sogar bei der Abrechnung ein Agioposten unter die Passiva aufzunehmen wäre.

Die Frage nach der Bewertung des Disagios ist aber nicht nur im Falle der Auseinandersetzung oder des Verkaufs der ganzen Unternehmung von Wichtigkeit, sie kann vielmehr stets bei Aufstellung der Bilanz gestellt werden. § 40 HGB. bestimmt: Bei der Aufstellung des Inventars und der Bilanz sind sämtliche Vermögensgegenstände und Schulden nach dem Werte anzusetzen, der ihnen in dem Zeitpunkte beizulegen ist, für welchen die Aufstellung stattfindet.

Die Bewertung der Obligationen wird aber durch Einsetzung eines geeigneten Aktivpostens, des Disagios, vorgenommen, und es ergibt sich also, daß das Disagio nicht nach einem im voraus festgelegten Modus abgeschrieben zu werden braucht, sondern daß es nach freiem Ermessen eingesetzt werden kann, natürlich unter Würdigung aller Verhältnisse und vor allem mit Berücksichtigung der Rechnungsgrundlagen. Dabei kann es vorkommen, daß man ein Jahr viel, ein anderes Jahr wenig vom Disagio abschreibt, ja es ist sogar der Fall denkbar, daß das Disagio in einem Jahre höher erscheint als im Vorjahre.

Ein solches Verfahren erscheint unbedenklich, da man ja auch Wertpapiere zum Kurswert in die Bilanz einsetzen kann (bei Aktiengesellschaften, sofern der Anschaffungspreis nicht überschritten wird), wodurch Konjunkturgewinne resp. Verluste entstehen.

Ob eine solche jährliche Neubewertung des Disagios praktisch ist, ist eine andere Frage. Hier kam es nur darauf an, das Wesen des Disagios

Digitized by Google

zu erklären, und die rechnerischen Grundlagen für diejenigen Fälle bereitzustellen, bei denen eine genaue Bewertung gewünscht wird.

Bislang waren nur Fälle berücksichtigt worden, bei denen der Emissionskurs einem runden effektiven Zinsfuß entsprach. Auf einen solchen wird man aber infolge von mancherlei bei der Emission entstehenden Unkosten in der Regel nicht rechnen können. Liegt ein spitzer Prozentsatz vor, so behalten natürlich die allgemeinen Betrachtungen über die Disagio-Abschreibung ihre volle Gültigkeit, nur kompliziert sich die genaue Rechnung dadurch, daß man zwischen zwei naheliegenden Kursen interpolieren muß.

Aufgabe. Eine 4%ige, in 20 Jahren bei gleichmäßiger Annuität tilgbare Anleihe von M 1000000.— wird von einer Bank netto für M 950000.— übernommen. In welcher Weise ist das Disagio von M 50000.— abzuschreiben?

1. Angenäherte Methode.

Die Annuität beträgt, wenn von der Stückelung abgesehen wird (S. 68),

$$\frac{\text{M } 1000000.-}{13.590326} = \text{M } 73581.75.$$

Der Gesamtaufwand an Zinsen und Tilgung ist daher

$$20 \times \text{M } 73581.75 = \text{M } 1471635.-.$$

Davon entfallen auf die Tilgung M 1000000.—
und auf 4% Zinsen „ 471635.—.

Die Summe der Kapitalreste ist daher

$$\frac{\text{M } 471635.- \times 100}{4} = \text{M } 11790875.-.$$

Das Disagio von M 50000.— macht also einen ungefähren Prozentsatz von

$$\frac{50000.-}{11790875.-} = 0.424\%$$

$$\begin{array}{rl} 1179) & 5000 = 4241 \\ & 284 \\ & 48 \\ & 1 \end{array}$$

aus, so daß sich die Gesamtbelastung auf 4.424% des Nennwertes oder auf

$$\frac{4.424}{95} = 4.657\%$$

des Emissionswertes stellt.

Digitized by Google

Von dem Disagio sind also immer 0.424 % des Nennwertes der Restschuld abzuschreiben.

Besteht die Anleihe aus Stücken à M 100.—, so rechnet sich der Tilgungsplan folgendermaßen (vgl. S. 77).

Die Tilgungsquote des ersten Jahres ist

Annuität	M 73581.75
÷ Zinsen	„ 40000.—
	M 33581.75

oder in Stücken ausgedrückt

335.82

Tilgungsquote	Stücke	Rest
335.82	335	0.82
+ 4 % 13.43	350	+ 0.25
349.25		0.07
+ 4 % 13.97		+ 0.22
363.22	363	0.29

usw.

Tilgungsplan.

Tilgungsquote Stücke	Tilgungsquote Betrag	Nennwert	Zinsen	Annuität	Disagio-Abschreib.	Gesamtaufwand
335	33500.—	1000000.—	40000.—	73500.—	4240.—	77740.—
350	35000.—	966500.—	38660.—	73660.—	4097.96	77757.96
363	36300.—	931500.—	37260.—	73560.—	3955.56	77515.56

usw.

2. Exakte Methode.

Der Emissionskurs 95.00 liegt zwischen 95.72 und 94.69. Dem Kurse 95.72 entspricht eine effektive Verzinsung von $4^1/_2$ %, dem Kurse 94.69 eine solche von $4^5/_8$ %.

	4.500	95.72	} 0.72	Der Kursdifferenz von 1.03 entspricht eine Zinsfußdifferenz von 0.125 %, mithin der Kursdifferenz von 0.72 eine Zinsfußdifferenz von
		95.—		
0.125	4.625	94.69	1.03	

$$\frac{0.125 \times 72}{103} = 0.0874.$$

Die Gesamtbelastung stellt sich also auf

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 4.500\,\% \\ +\,0.087\,\% \\ \hline 4.587\,\%, \end{array}$$

während sie bei der Näherungsmethode zu 4.657% berechnet war.

Für die Berechnung des Disagios braucht man zunächst die Kurse für eine 4.587%ige effektive Verzinsung. Diese liegen zwischen den Kursen der 4.5%igen und 4.625%igen effektiven Verzinsung, und zwar ist die Kursdifferenz immer mit

$$\frac{87}{125} = 0.696$$

zu multiplizieren und dieser Betrag von dem 4.5%igen Kurse abzuziehen.

	Kurs bei 4.5% effektiv	Kurs bei 4.625% effektiv	Differenz	Differenz × 0.696	Kurs bei 4.587% effektiv
1	95.72	94.69	1.03	0.717	95.00
2	95.89	94.89	1.00	0.696	95.19
3	96.06	95.10	0.96	0.668	95.39

Man erhält also

Nennwert	Kurs	Kurswert bei 4.587 effektiv	Disagio	Abschreibung
1000000.—	95.00	950000.—	50000.—	3611.35
966500.—	95.19	920111.35	46388.65	3446.50
931500.—	95.39	888557.85	42942.15	

Die Differenz gegen den ungenauen Abschreibungswert beträgt etwa M 600.—.

b) Disagio bei Anleihen, die über Pari rückzahlbar sind.

Ist eine Anleihe über Pari rückzahlbar, so setzt man sie zu diesem erhöhten Werte in die Passivseite der Bilanz ein und nimmt unter die Aktiva die ganze Differenz des Emissionswertes gegen den Rückzahlungswert als Disagio auf. Ob der Emissionskurs M 100.— oder niedriger oder höher ist, ist dabei ganz gleichgültig.

Aufgabe 1. Eine 4%ige Anleihe von M 1000000.—, die in 4 Jahren bei gleichmäßiger Annuität mit 2% Aufgeld rückzahlbar ist, wird von einer Bank zum Kurse von 100.62 übernommen. Welche prozentuale

Digitized by Google

Belastung entsteht dem ausgebenden Unternehmen, und wie ist das Disagio abzuschreiben?

1. Exakte Methode.

Es ist oben (S. 101, Lehrsatz 2) gezeigt worden, daß der Kurs eines über Pari stehenden Papiers sich als Produkt zweier Kurse berechnen läßt. Z. B. war dort der Kurs der in der Aufgabe beschriebenen, aber mit 10% Aufgeld rückzahlbaren Anleihe berechnet worden zu

$$\frac{98.83 \times 109.06}{100} = 107.78.$$

Entsprechend würde sich der Kurs der mit 2% rückzahlbaren Anleihe bei $4^1/_2$% effektiver Verzinsung berechnen zu

$$\frac{\boxed{98.83} \times 101.81}{100} = \boxed{100.62}.$$

Im vorliegenden Falle ist allerdings die effektive Verzinsung und damit der Kurs 98.83 unbekannt, dagegen der Kurs 100.62 gegeben; man sieht aber, daß der unbekannte Kurs 98.83 sich aus dem gegebenen 100.62 berechnet zu

$$\boxed{98.83} = \frac{100.62 \times 100}{101.81}.$$

$$\begin{array}{rl} 10181) & 100620 = 9883 \\ & 8991 \\ & 846 \\ & 31 \end{array}$$

98.83 ist dann der Kurs einer al pari in 4 Jahren tilgbaren 4%igen Anleihe bei der gesuchten effektiven Verzinsung. Aus der Kurstabelle ergibt sich, daß diesem Kurse eine $4^1/_2$%ige effektive Verzinsung entspricht.

Der Kurs 101.81 dagegen ist von der effektiven Verzinsung unabhängig; er ist der Kurs einer mit 2% Aufgeld rückzahlbaren 4%igen Anleihe bei 4% effektiv.

Ist die prozentuale Gesamtbelastung bestimmt, so handelt es sich darum, den Abschreibungsplan für das Disagio zu berechnen.

Dieses steht ursprünglich zu Buche mit

	M 1020000.—
÷	„ 1006200.—
	M 13800.—

Aktiva.		Passiva.	
Disagio	13800.—	Obligationen	1020000.—.

Digitized by Google

Da das Disagio die Differenz zwischen Rückzahlungswert und Kurswert bei $4^1/_2\%$ effektiv darstellen soll, so sind zunächst die Kurse für die folgenden Jahre zu berechnen.

Aus der Kurstabelle kann man die Kurse der entsprechenden mit 20% Aufgeld tilgbaren Anleihen entnehmen. Sie sind

(4)	1	118.12
(3)	2	118.48
(2)	3	118.85
(1)	4	119.23.

Demnach entsprechen einem Aufgeld von 2% die Kurse

1	101.81
2	101.85
3	101.88
4	101.92.

Die Kurse einer al pari rückzahlbaren 4%igen Anleihe bei $4^1/_2\%$ effektiv sind

1	98.83
2	99.06
3	99.29
4	99.52.

Die Kurse der mit Aufgeld rückzahlbaren 4%igen Anleihe bei $4^1/_2\%$ effektiv sind daher

$$98.83 \times 101.81 = 100.62$$
$$99.06 \times 101.85 = 100.89$$
$$99.29 \times 101.88 = 101.16$$
$$99.52 \times 101.92 = 101.43.$$

Mit diesen Kursen sind die im Tilgungsplan enthaltenen Nennwerte der Restschuld zu multiplizieren. Da die Berechnung eines solchen Tilgungsplans bereits früher (S. 82) gezeigt worden ist, möge derselbe hier nur angegeben werden.

	Tilgungsquote		Kapital	4% Zinsen	2% Aufgeld	Annuität
	Stücke	Betrag				
1	2357	235700	1000000	40000	4714	280414
2	2450	245000	764300	30572	4900	280472
3	2546	254600	519300	20772	5092	280464
4	2647	264700	264700	10588	5294	280582
Sa.	10000	1000000	2548300	161932	20000	1121932

Digitized by Google

Aus den Nennwerten des Restkapitals berechne man die Kurswerte und aus den Differenzen das Disagio.

	Nennwert ohne Aufgeld	Kurs	Kurswert	Nennwert mit Aufgeld	Disagio	Abschreib.
1	1000000.—	100.62	1006200.—	1020000.—	13800.—	5316.27
2	764300.—	100.89	771102.27	779586.—	8483.73	4121.61
3	519300.—	101.16	525323.88	529686.—	4362.12	2853.33
4	264700.—	101.43	268485.21	269994.—	1508.79	1508.79
Sa.	2548300.—		2571111.36			13800.—

Die jährliche Gesamtbelastung setzt sich aus Zinsen und Disagio-Abschreibung zusammen.

	Zinsen	Disagio-Abschreibung.	Gesamtbelastung	Restschuld (Kurswert bei 4.5% effektiv)	Prozentuale Gesamtbelastung
1	40000.—	5316.27	45316.27	1006200.—	4.504%
2	30572.—	4121.61	34693.61	771102.27	4.499%
3	20772.—	2853.33	23625.33	525323.88	4.497%
4	10588.—	1508.79	12096.79	268485.21	4.506%
Sa.	101932.—	13800.—	115732.—	2571111.36	4.501%

Im Mittel ergibt sich die prozentuale Belastung von

$$\frac{115732.—}{2571111.36} = 4.501\,\%,$$

was genau dem Kurse 98.83 entspricht (vgl. S. 111). Im übrigen ist die Belastung bis auf kleine Abweichungen, die durch die ungenaue Angabe der Kurse bedingt sind, konstant 4.5%.

Es zeigt sich dadurch, daß bei über pari rückzahlbaren Obligationen das Disagio keinen anderen Charakter hat als bei den zu pari rückzahlbaren. Es ist auch hier lediglich ein Bewertungsposten, so daß alle sub a) gewonnenen allgemeinen Resultate ihre Gültigkeit behalten.

2. Näherungsmethode.

Es ist ohne weiteres einzusehen, daß die sub a) angegebene Näherungsmethode sich auch bei Obligationen, die über pari rückzahlbar sind, anwenden läßt, wenn man mit Disagio einfach die Differenz zwischen Rückzahlungswert und Emissionswert bezeichnet.

Die Summe der Kapitalreste ist nach dem Tilgungsplan S. 135

M 2548300.—.

Digitized by Google

In Prozenten dieses Betrages ausgedrückt, ist das Disagio

$$\frac{13800.—}{2548300.—} = 0.5415\,\%;$$

danach berechnet sich die Disagio-Abschreibung zu

	Nennwert	Abschreibung 0.5415 %	Abschreibung (exakt)	Differenz
1	1000000.—	5415.—	5316.27	+ 98.73
2	764300.—	4139.68	4121.61	+ 17.39
3	519300.—	2812.00	2853.33	— 41.33
4	264700.—	1434.—	1508.79	— 74.79
Sa.	2548300.—	13800.—	13800.—	0

Auch hier werden bei näherungsweiser Berechnung der Abschreibungsquoten die ersten Jahre stärker belastet zugunsten der späteren.

Stellt sich bei Berechnung der effektiven Belastung heraus, daß der ermittelte Kurs nicht in der Tabelle enthalten ist, so ist der Zinsfuß durch Interpolation zu finden. Ebenso hat man dann die für die Ermittlung des Disagios nötigen Kurswerte durch Interpolation zu berechnen. Das Verfahren ist dem sub a) angegebenen ganz entsprechend und braucht daher hier nur angedeutet zu werden.

Aufgabe 2. Eine 4 %ige Anleihe, die bei gleichmäßiger Annuität in 25 Jahren mit 3 % Aufgeld getilgt werden soll, ist von einer Bank netto zum Kurse von 96.50 übernommen worden. Wie hoch stellt sich die prozentuale Belastung für den Schuldner, und wie ist das Disagio zu tilgen?

Der Kurs einer 4 %igen in 25 Jahren mit 20 % Aufgeld tilgbaren Anleihe ist bei 4 % effektiv nach der Kurstabelle 111.69, mithin der Kurs einer gleichen Anleihe mit 3 % Aufgeld

101.75.

Der Kurs einer entsprechenden Anleihe ohne Aufgeld bei der unbekannten effektiven Verzinsung berechnet sich daher zu

$$\frac{96.50 \times 100}{101.75} = 94.84.$$

10175) 96500 = 9484
4925
855
41.

Dieser Kurs liegt zwischen 94.92 und 93.71, denen die effektiven Zinsfüße 4 1/2 % und 4 5/8 % entsprechen. Die gesuchte Verzinsung liegt

Digitized by Google

daher zwischen $4\frac{1}{2}\%$ und $4\frac{5}{8}\%$. Ihr Wert bestimmt sich durch Interpolation zu

	$4\frac{1}{2}$	94.92	0.08	$\frac{0.125 \times 8}{121} = 0.008$
		94.84		4.500
0.125	$4\frac{5}{8}$	93.71	1.01	+ 0.008
				4.508%.

Diesem Zinsfuß entsprechen der Reihe nach die Kurse

	$4\frac{1}{2}\%$	4.508%	$4\frac{5}{8}\%$
1	94.92	94.84	93.71
2	95.07	94.99	93.90
3	95.23	95.15	94.09

Für eine 4%ige Anleihe, die mit 20% resp. mit 3% Aufgeld tilgbar ist, erhält man bei 4% effektiv der Reihe nach die Kurse

	20% Aufgeld	3% Aufgeld
1	111.69	101.75
2	111.95	101.79
3	112.21	101.85

Die Kurse der Anleihe bei 4.508% effektiv sind daher

1. $94.84 \times 101.75 = 96.50$
2. $94.99 \times 101.79 = 96.69$
3. $95.15 \times 101.85 = 96.91$.

Im übrigen gestaltet sich die Rechnung wie oben. Das Näherungsverfahren*) liefert, auf den Nennwert bezogen, einen Zinsfuß von 4.438% und, auf den Emissionskurs bezogen, einen solchen von

$$\frac{4.4383}{96.50} = 4.599\%$$

statt 4.508%.

*) Vgl. Manfred Berliner.

Digitized by Google

11. Versicherung gegen Auslosungsverlust.

Eine Anleihe von M 1 000 000.—, eingeteilt in 10 000 Stücke à M 100.—, soll bei gleichmäßiger Annuität mit 4 % verzinst und in 4 Jahren getilgt werden. Der Tilgungsplan ist folgender (vgl. S. 111):

Anzahl der auszulosenden Stücke	Zu verzinsendes Kapital	Zinsen	Tilgungsquote	Annuität
2355	1 000 000	40 000	235 500	275 500
2449	764 500	30 580	244 900	275 480
2547	519 600	20 784	254 700	275 484
2649	264 900	10 596	264 900	275 496

Der Emissionskurs sei 101.19; er entspricht einer $3\frac{1}{2}$ %igen Verzinsung. Diese Verzinsung ist nach den Ausführungen des Abschnitts 8 (S. 111ff.) eine durchschnittliche. Diejenigen Stücke, die in den ersten Jahren gezogen werden, gewähren eine geringere, diejenigen, die nicht gezogen werden, eine höhere Verzinsung. Durch die Auslosung entsteht also gegenüber der $3\frac{1}{2}$ %igen Verzinsung ein Verlust, gegen den man sich durch Zahlung einer geringeren Prämie versichern kann.

Wird ein Stück am Ende des ersten Jahres gezogen, so erhält der Inhaber 4 % Zinsen = M 4.—;
er erleidet aber einen Kapitalverlust von „ 1.19
Differenz = M 2.81.

Die Rentabilität stellt sich daher auf

$$\frac{2.81}{101.19} = 2.777\,\%,$$

während das Stück beim Kurse 101.19 eine Rentabilität von 3.5 % gewähren sollte.

Der Auslosungsverlust ist daher = M 3.500
÷ „ 2.777
M 0.723.

Im folgenden soll jedoch unter Kursverlust die volle Differenz zwischen Anschaffungskurs und Rückzahlungskurs verstanden werden, im vorliegenden Falle also M 1.19.

Digitized by Google

Aufgabe 1. Wie hoch berechnet sich die Nettoprämie*), durch die der Inhaber eines Stückes der vorliegenden Anleihe sich zu Anfang des ersten Jahres gegen einen am Ende des ersten Jahres drohenden Kursverlust von M 1.19 versichern kann?

Werden sämtliche 10000 Stücke bei einer Bank gegen Kursverlust versichert und beträgt die Prämie P, so hat die Bank eine

Einnahme von $10000\,P$.

Da am Ende des Jahres 2355 Stücke gezogen werden, und die Bank für jedes Stück M 1.19 zahlen muß, so entstehen

$$\text{Ausgaben von } 2355 \times \text{M } 1.19 = \text{M } 2802.45.$$

Der diskontierte Wert derselben ist bei $4\,\%$

$$\text{M } 2802.45 \times 0.961538 = \text{M } 2694.66.$$

2355×119	280245
2355	835169
21195	2522205
280245	168147
	2803
	1401
	84
	23
	2694663

Einnahmen	Ausgaben (heutiger Wert)
$10000 \times P$	M 2694.66.

Da die Nettoprämie so berechnet werden soll, daß für die versichernde Bank weder Gewinn noch Verlust entsteht, so ist

$$10000\,P = \text{M } 2694.66$$
$$P = \text{M } 0.2695.$$

Mit einer Nettoprämie von 27 Pfg. kann man sich bei vorliegender Anleihe gegen einen am Ende des ersten Jahres drohenden Kursverlust versichern.

Lehrsatz 1. Die Nettoprämie der Kursversicherung berechnet sich als

$$P = \frac{2355}{10000} \times 1.19 \times 0.961538,$$

sie ist also das Produkt aus dem diskontierten Wert des Kursverlustes und der Auslosungswahrscheinlichkeit (S. 115).

*) Zu der Netto-Prämie erhebt die versichernde Bank noch einen Zuschlag. Nettoprämie + Zuschlag bezeichnet man als Bruttoprämie.

Digitized by Google

Aufgabe 2. Wie groß ist die Nettoprämie, wenn die Versicherung gegen Auslosungsverlust für die ganze Tilgungsdauer der Anleihe genommen wird?

Geht man wieder davon aus, daß alle 10000 Stücke versichert werden, so betragen die

Einnahmen	Ausgaben (disk. Werte)
10000 P	$2355 \times 1.19 \times 0.961538$
	$2449 \times 1.19 \times 0.924556$
	$2547 \times 1.19 \times 0.888996$
	$2649 \times 1.19 \times 0.854804.$

Da die Tilgungsquote jährlich um 4% wächst, so ist die Summe der Ausgaben (vgl. S. 82)

$$\begin{aligned} &4 \times 2355 \times 1.19 \times 0.961538 \\ &= 4 \times 2694.66 \\ &= 10778.64. \end{aligned}$$

Einnahmen	Ausgaben (disk. Werte)
10000 P	M 10778.64

$$\begin{aligned} 10000\ P &= M\ 10778.64 \\ P &= M\ 1.0779. \end{aligned}$$

Da der Anschaffungskurs des Stückes zu 101.19 angenommen war, so stellt sich der Preis einschließlich Versicherungsprämie auf

$$\begin{array}{r} 101.19 \\ +\ 1.08 \\ \hline 102.27. \end{array}$$

Ein so gegen Kursverlust versichertes Stück repräsentiert praktisch ein Papier, das mit einem Aufgeld von 1.19 rückzahlbar ist. Der Kurs eines solchen Papiers würde sich bei $3\frac{1}{2}$%iger effektiver Versinsung (vgl. S. 101) auf

$$\frac{101.08 \times 101.19}{100} = 102.28$$

stellen.

Lehrsatz 2. Der Preis eines al pari rückzahlbaren Papieres einschließlich Versicherungsprämie ist gleich dem Preise eines gleichartigen Papiers, das mit einem Aufgeld in Höhe des versicherten Betrages tilgbar ist.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, den Betrag der Prämie einer Kurstabelle zu entnehmen.

Digitized by Google

Druck von Poeschel & Trepte in Leipzig.

Digitized by Google

VERLAG CARL ERNST POESCHEL · LEIPZIG

Von demselben Verfasser

Versicherungs-Rechnung für Nicht-Mathematiker

broschiert Mark 4.80
gebunden Mark 6.—

Banken-Organisation

(Hervorgegangen aus dem Preisausschreiben der „Zeitschrift für Handelswissenschaft und Handelspraxis")

von PORGES, REHMER und SCHACH

broschiert Mk. 7.—; gebunden Mk. 8.50

Studien zur Geschichte des deutschen Effektenbankwesens

vom ausgehenden Mittelalter bis zur Jetztzeit

von Dr. LUDWIG METZLER

broschiert Mark 6.—; gebunden Mark 7.20

Digitized by Google

VERLAG CARL ERNST POESCHEL · LEIPZIG

Geld-
Bank- und Börsenwesen

von Bankdirektor Dr. GEORG OBST

7. Auflage, gebunden Mark 5.40

Kartellbetrieb

von Dr. H. NICKLISCH

broschiert M 6.—; gebunden M 7.20

Zeitschrift für Handelswissenschaft und Handelspraxis

mit dem Beiblatt

Der Kaufmann und das Leben

Quartal Mark 3.— Probehefte kostenlos

Digitized by Google

TABELLEN ZU BERLINER RENTEN UND ANLEIHEN

LEIPZIG 1912
VERLAG CARL ERNST POESCHEL

Digitized by Google

Digitized by Google

Tabelle I.

Zinseszins-Tabelle. 4%.

Jahre	Aufzinsung	Abzinsung
0	1.	1.
1	1.04	0.961 538
2	1.081 6	924 556
3	1.124 864	888 996
4	1.169 859	854 804
5	1.216 653	821 927
6	1.265 319	0.790 315
7	1.315 932	759 918
8	1.368 569	730 690
9	1.423 312	702 587
10	1.480 244	675 564
11	1.539 454	0.649 581
12	1.601 032	624 597
13	1.665 074	600 574
14	1.731 676	577 475
15	1.800 944	555 265
16	1.872 981	0.533 908
17	1.947 901	513 373
18	2.025 817	493 628
19	2.106 849	474 642
20	2.191 123	456 387
21	2.278 768	0.438 834
22	2.369 919	421 955
23	2.464 716	405 726
24	2.563 304	390 121
25	2.665 836	375 117
26	2.772 470	0.360 689
27	2.883 369	346 817
28	2.998 703	333 477
29	3.118 651	320 651
30	3.243 398	308 319
31	3.373 133	0.296 460
32	3.508 059	285 058
33	3.648 381	274 094
34	3.794 316	263 552
35	3.946 089	253 415
36	4.103 933	0.243 669
37	4.268 090	234 297
38	4.438 813	225 285
39	4.616 366	216 621
40	4.801 021	208 289

Tabelle II.

Renten-Tabelle. 4%.

Jahre	Aufzinsung	Abzinsung
1	1.04	0.961 538
2	2.1216	1.886 095
3	3.246 464	2.775 091
4	4.416 323	3.629 895
5	5.632 975	4.451 822
6	6.898 294	5.242 137
7	8.214 226	6.002 055
8	9.582 795	6.732 745
9	11.006 107	7.435 332
10	12.486 351	8.110 896
11	14.025 805	8.760 477
12	15.626 838	9.385 074
13	17.291 911	9.985 648
14	19.023 588	10.563 123
15	20.824 531	11.118 387
16	22.697 512	11.652 296
17	24.645 413	12.165 669
18	26.671 229	12.659 297
19	28.778 079	13.133 939
20	30.969 202	13.590 326
21	33.247 970	14.029 160
22	35.617 889	14.451 115
23	38.082 604	14.856 842
24	40.645 908	15.246 963
25	43.311 745	15.622 080
26	46.084 214	15.982 769
27	48.967 583	16.329 586
28	51.966 286	16.663 063
29	55.084 938	16.983 715
30	58.328 335	17.292 033
31	61.701 469	17.588 494
32	65.209 527	17.873 552
33	68.857 909	18.147 646
34	72.652 225	18.411 198
35	76.598 314	18.664 613
36	80.702 246	18.908 282
37	84.970 336	19.142 579
38	89.409 150	19.367 864
39	94.025 516	19.584 485
40	98.826 536	19.792 774

Digitized by Google

Tabelle III.

Jahre	Zinseszins-Tabelle. 2%.		Renten-Tabelle. 2%.	
	Aufzinsung	Abzinsung	Aufzinsung	Abzinsung
1	1.02	0.980 392	1.02	0.980 392
2	1.040 4	961 169	2.060 4	1.941 561
3	1.061 208	942 322	3.121 608	2.883 883
4	1.082 432	923 845	4.204 040	3.807 729
5	1.104 081	905 731	5.308 121	4.713 460
6	1.126 162	0.887 971	6.434 283	5.601 431
7	1.148 686	870 560	7.582 969	6.471 991
8	1.171 659	853 490	8.754 628	7.325 481
9	1.195 093	836 755	9.949 721	8.162 237
10	1.218 994	820 348	11.168 715	8.982 585
11	1.243 374	0.804 263	12.412 090	9.786 848
12	1.268 242	788 493	13.680 332	10.575 341
13	1.293 607	773 033	14.973 938	11.348 374
14	1.319 479	757 875	16.293 417	12.106 249
15	1.345 868	743 015	17.639 285	12.849 264
16	1.372 786	0.728 446	19.012 071	13.577 709
17	1.400 241	714 163	20.412 312	14.291 872
18	1.428 246	700 159	21.840 559	14.992 031
19	1.456 811	686 431	23.297 370	15.678 462
20	1.485 947	672 971	24.783 317	16.351 433
21	1.515 666	0.659 776	26.298 984	17.011 209
22	1.545 980	646 839	27.844 963	17.658 048
23	1.576 899	634 156	29.421 862	18.292 204
24	1.608 437	621 721	31.030 300	18.913 926
25	1.640 606	609 531	32.670 906	19.523 456
26	1.673 418	0.597 579	34.344 324	20.121 036
27	1.706 886	585 862	36.051 210	20.706 898
28	1.741 024	574 375	37.792 235	21.281 273
29	1.775 845	563 112	39.568 079	21.844 385
30	1.811 362	552 071	41.379 441	22.396 456
31	1.847 589	0.541 246	43.227 030	22.937 702
32	1.884 541	530 633	45.111 570	23.468 335
33	1.922 231	520 229	47.033 802	23.988 564
34	1.960 676	510 028	48.994 478	24.498 592
35	1.999 890	500 028	50.994 367	24.998 619
36	2.039 887	0.490 223	53.034 255	25.488 842
37	2.080 685	480 611	55.114 940	25.969 453
38	2.122 299	471 187	57.237 238	26.440 641
39	2.164 745	461 948	59.401 983	26.902 589
40	2.208 040	452 890	61.610 023	27.355 479

Digitized by Google

Tabelle IV.

Abzinsungs-Tabelle.

Jahre	3½%		4½%	
	Kapital	Rente	Kapital	Rente
1	0.966 184	0.966 184	0.956 938	0.956 938
2	933 511	1.899 694	915 730	1.872 668
3	901 943	2.801 637	876 297	2.748 964
4	871 442	3.673 079	838 561	3.587 526
5	841 973	4.515 052	802 451	4.389 977
6	0.813 501	5.328 553	0.767 896	5.157 872
7	785 991	6.114 544	734 828	5.892 701
8	759 412	6.873 956	703 185	6.595 886
9	733 731	7.607 687	672 904	7.268 791
10	708 919	8.316 605	643 928	7.912 718
11	0.684 946	9.001 551	0.616 199	8.528 917
12	661 783	9.663 334	589 664	9.118 581
13	639 404	10.302 738	564 272	9.682 852
14	617 782	10.920 520	539 973	10.222 825
15	596 891	11.517 411	516 720	10.739 546
16	0.576 706	12.094 117	0.494 469	11.234 015
17	557 204	12.651 321	473 176	11.707 192
18	538 361	13.189 682	452 800	12.159 992
19	520 156	13.709 837	433 302	12 593 294
20	502 566	14.212 403	414 643	13.007 936
21	0.485 571	14.697 974	0.396 787	13.404 724
22	469 151	15.167 125	379 701	13.784 425
23	453 286	15.620 410	363 350	14.147 775
24	437 957	16.058 368	347 703	14.495 478
25	423 147	16.481 515	332 730	14.828 209
26	0.408 838	16.890 352	0.318 402	15.146 611
27	395 012	17.285 365	304 691	15.451 303
28	381 654	17.667 019	291 571	15.742 874
29	368 748	18.035 767	279 015	16.021 889
30	356 278	18.392 045	267 000	16.288 889
31	0.344 230	18.736 276	0.255 502	16.544 391
32	332 590	19.068 865	244 500	16.788 891
33	321 343	19.390 208	233 971	17.022 862
34	310 476	19.700 684	223 896	17.246 758
35	299 977	20.000 661	214 254	17.461 012
36	0.289 833	20.290 494	0.205 028	17.666 041
37	280 032	20.570 525	196 199	17.862 240
38	270 562	20.841 087	187 750	18.049 990
39	261 413	21.102 500	179 665	18.229 656
40	252 572	21.355 072	171 929	18.401 584

Digitized by Google

Tabelle V.

Antizipative Zinsen.

Jahre	2%		4%	
	Aufzinsung	Abzinsung	Aufzinsung	Abzinsung
1	1.020 498	0.98	1.041 667	0.96
2	1.041 233	960 4	1.085 069	921 6
3	1·062 482	941 192	1.130 281	884 736
4	1.084 166	922 368	1.177 376	849 347
5	1.106 292	903 921	1.226 433	815 373
6	1.128 869	0.885 842	1.277 534	0.782 758
7	1.151 907	868 126	1.330 765	751 447
8	1.175 415	850 763	1.386 214	721 390
9	1.199 404	833 748	1.443 972	692 534
10	1.223 881	817 073	1.504 138	664 833
11	1.248 858	0.800 731	1.566 810	0.638 239
12	1.274 345	784 717	1.632 094	612 710
13	1.300 352	769 022	1.700 098	588 201
14	1.326 890	753 642	1.770 935	564 673
15	1.353 969	738 569	1.844 724	542 086
16	1.381 601	0.723 798	1.921 588	0.520 403
17	1.409 797	709 322	2.001 654	499 587
18	1.438 569	695 135	2.085 056	479 603
19	1.467 927	681 233	2.171 934	460 419
20	1.497 885	667 608	2.262 431	442 002
21	1.528 454	0.654 256	2.356 699	0.424 322
22	1.559 647	641 171	2.454 895	407 349
23	1.591 477	628 347	2.557 182	391 055
24	1.623 956	615 780	2.663 731	375 413
25	1.657 098	603 465	2.774 720	360 397
26	1.690 916	0.591 395	2.890 333	0.345 981
27	1.725 424	579 568	3.010 764	332 142
28	1.760 637	567 976	3·136 212	318 856
29	1.796 569	556 617	3.266 888	306 102
30	1.833 233	554 484	3.403 008	293 858
31	1.870 646	0.534 575	3.544 800	0.282 103
32	1.908 823	523 883	3.692 500	270 819
33	1.947 778	513 405	3.846 355	259 986
34	1.987 529	503 137	4.006 616	249 587
35	2.028 091	493 075	4·175 562	239 604
36	2.069 480	0.483 213	4.347 460	0.230 019
37	2.111 714	473 549	4·528 604	220 819
38	2.154 811	464 078	4.717 296	211 986
39	2.198 786	454 796	4.913 850	203 506
40	2.243 660	445 700	5.118 594	195 366

Digitized by Google

Tabelle VI.

Kurse von à 100 auslosbaren Obligationen*).

Jahre	$3\frac{1}{2}\%$ effektiv		$3\frac{7}{8}\%$ effektiv		4% effektiv		$4\frac{1}{2}\%$ effektiv	
	$3\frac{1}{2}\%$ nom.	4% nom.	$3\frac{1}{2}\%$ nom.	4% nom.	$3\frac{1}{2}\%$ nom.	4% nom.	$3\frac{1}{2}\%$ nom.	4% nom.
1	100.—	100.48	99.64	100.12	99.52	100.—	99.04	99.52
2	„	72	46	18	28	„	98.58	29
3	„	96	29	24	05	„	12	06
4	„	101.19	12	30	98.82	„	97.67	98.83
5	„	42	98.95	35	60	„	23	61
6	„	45	78	41	38	„	96.80	39
7	„	87	62	46	16	„	37	18
8	„	102.10	46	52	97.95	„	95.95	97.97
9	„	32	30	57	74	„	54	76
10	„	54	14	63	53	„	14	56
11	„	76	97.98	68	32	„	94.75	36
12	„	97	83	73	12	„	36	16
13	„	103.17	68	78	96.92	„	93.98	96.97
14	„	38	54	83	73	„	61	78
15	„	59	38	88	54	„	25	59
16	„	79	24	93	35	„	92.89	41
17	„	99	10	98	16	„	54	23
18	„	104.19	96.96	101.02	95.98	„	19	06
19	„	38	82	07	80	„	91.86	95.89
20	„	58	69	12	62	„	53	72
21	„	77	56	16	45	„	20	55
22	„	96	43	21	28	„	90.88	39
23	„	105.14	30	25	11	„	57	23
24	„	32	17	29	94.95	„	27	07
25	„	50	05	34	79	„	89.97	94.92
26	„	68	95.93	38	63	„	68	77
27	„	85	81	42	47	„	39	62
28	„	106.03	69	46	32	„	11	48
29	„	20	58	50	17	„	88.84	34
30	„	36	46	53	02	„	57	20
31	„	53	35	57	93.88	„	30	06
32	„	69	24	61	73	„	04	93.93
33	„	85	14	65	59	„	87.79	80
34	„	107.01	03	68	45	„	55	68
35	„	16	94.93	72	32	„	31	55
36	„	31	83	75	19	„	07	43
37	„	46	73	79	06	„	86.84	31
38	„	61	63	82	92.93	„	61	19
39	„	75	53	86	81	„	39	08
40	„	89	43	89	69	„	17	92.97

*) Aus Schinkenberger, loc. cit.

Digitized by Google

Tabelle VII.

Kurse von à 120 auslosbaren Obligationen*).

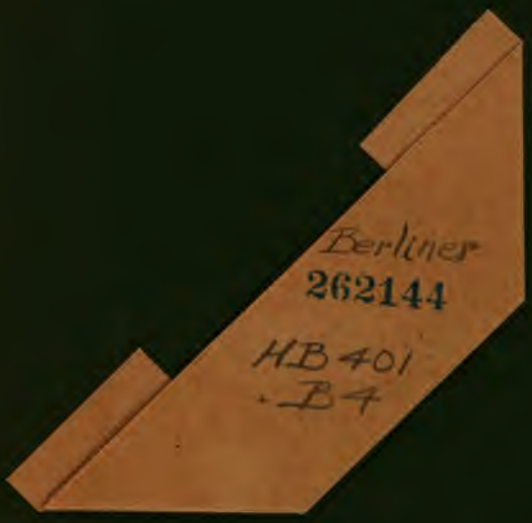
Jahre	3% effekt.	3½% effekt.	4% effekt.	4½% effekt.	5% effekt.
	3% nom.	3½% nom.	4% nom.	4½% nom.	5% nom.
1	119.42	119.33	119.23	119.14	119.05
2	13	118.99	118.85	118.72	118.58
3	118.85	66	48	31	13
4	57	34	12	117.90	117.68
5	29	02	117.76	50	25
6	02	117.71	41	11	116.82
7	117.75	40	06	116.73	40
8	48	09	116.72	35	115.99
9	22	116.79	38	115.95	59
10	116.96	50	05	61	19
11	70	20	115.72	26	114.80
12	45	115.91	40	114.91	42
13	20	63	09	56	05
14	115.95	35	114.78	22	113.69
15	70	08	47	113.89	33
16	45	114.80	17	57	112.99
17	20	53	113.87	25	65
18	114.97	27	58	112.94	31
19	74	01	30	63	111.99
20	52	113.76	02	33	67
21	30	50	112.75	04	36
22	07	25	48	111.75	05
23	113.85	01	21	46	110.75
24	63	112.77	111.95	18	46
25	41	53	69	110.91	18
26	20	30	44	64	109.90
27	112.99	07	19	38	63
28	78	111.84	110.95	13	36
29	58	62	71	109.88	10
30	38	40	48	63	108.85
31	18	18	25	39	60
32	111.98	110.96	02	16	36
33	78	75	109.80	108.93	12
34	59	55	58	70	107.89
35	40	34	37	48	67
36	22	14	16	27	45
37	04	109.95	108.95	06	24
38	110.85	76	75	107.85	03
39	67	57	56	65	106.83
40	50	38	37	45	63

*) Aus Schinkenberger, loc. cit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Berliner
262144
HB 401
.B4

Digitized by Google

Digitized by Google